

**JORGE LUÍS DE SOUZA MOTA**

**UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS PARA A ANÁLISE DO COMPORTAMENTO  
BIOMECÂNICO DO LIGAMENTO PERIODONTAL**

**CURITIBA**

**2005**

**JORGE LUÍS DE SOUZA MOTA**

**UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS PARA A ANÁLISE DO COMPORTAMENTO  
BIOMECÂNICO DO LIGAMENTO PERIODONTAL**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, área de concentração em Mecânica Computacional, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mildred Ballin Hecke**

**Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone  
Machado**

**CURITIBA**

**2005**

JORGE LUÍS DE SOUZA MOTA

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A  
ANÁLISE DO COMPORTAMENTO BIOMECÂNICO DO LIGAMENTO  
PERIODONTAL

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências,  
na área de concentração Mecânica Computacional, pelo Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pelos professores:

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mildred Ballin Hecke  
Setor de Tecnologia, UFPR

Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado  
Setor de Tecnologia, UFPR

Prof. Dr. Sérgio Scheer  
Setor de Tecnologia, UFPR

Prof. Dr. João Carlos Gomes  
Setor de Ciências Biológicas e da Saúde, UEPG

Curitiba, 18 de agosto de 2005

## **Dedicatória**

A minha mãe Jardimina e ao meu pai Jorge, que não só me colocaram no mundo, mas também sempre pugnaram para que nele não me perdesse.

## **Agradecimentos**

A Deus, sublime essência do Cósmico, por me dar a oportunidade de estar aqui e agora.

A Tatiana e Isis, filhas queridas, vocês são motivação mais do que suficiente para tentar ser melhor a cada dia.

Aos meus irmãos Júlio, Jean e Marcos Vinícius pela companhia, amizade e incentivo.

Aos amigos Marcos Koteski, Gilson Okpis, Wilson Lavras, e a todos que das mais diversas maneiras incentivaram esse passo a fim de conseguir aumentar meu volume de conhecimento e tentar ser mais útil à sociedade do que tinha sido até então.

Aos amigos Ana Gebert, Marcos Cesar Czezacki e Marcioh Monteiro de Melo pela paciência na revisão dos conceitos odontológicos envolvidos, pelas sugestões bibliográficas e pelas críticas, que tornaram possível a um leigo em odontologia se familiarizar com a matéria e produzir um texto sobre a mesma.

Aos amigos do CESEC, pelo convívio produtivo onde cada qual procura colaborar com suas experiências para o crescimento dos demais; à secretária do CESEC, Maristela Bandil por tornar nossa vida acadêmica muito mais fácil com sua generosidade e prontidão.

Aos meus orientadores Professora Doutora Mildred Ballin Hecke e Professor Doutor Roberto Dalledone Machado que, desde o primeiro contato, acreditaram no meu potencial para levar tal desafio adiante e facilitaram sobremaneira minha busca.

A todos vocês, muitíssimo obrigado!

## Epígrafe

*A sabedoria clama lá fora; pelas ruas levanta a sua voz.*

*Provérbios 1,20*

*Porque o Senhor dá a sabedoria; da sua boca é que vem o conhecimento e o entendimento.*

*Provérbios 2,6*

# Sumário

<b>Dedicatória</b> . . . . .	iii
<b>Agradecimentos</b> . . . . .	iv
<b>Epígrafe</b> . . . . .	v
<b>Lista de figuras</b> . . . . .	xi
<b>Lista de tabelas</b> . . . . .	xvi
<b>Lista de símbolos</b> . . . . .	xvii
<b>Resumo</b> . . . . .	xxi
<b>Abstract</b> . . . . .	xxii
<b>1 Introdução</b> . . . . .	1
1.1 Motivações . . . . .	2
1.2 Metodologia . . . . .	4
1.3 Objetivo do trabalho . . . . .	5
1.4 Estrutura da dissertação . . . . .	6
<b>2 Revisão da literatura</b> . . . . .	8
2.1 Simulações com elementos planos e espaciais . . . . .	8
2.2 Simulações por contato . . . . .	15
2.3 Simulações com molas . . . . .	16
2.4 Outros artigos de interesse . . . . .	16
<b>3 Fundamentação teórica</b> . . . . .	22
3.1 Ligamento periodontal . . . . .	22
3.1.1 Dentes . . . . .	24
3.1.2 Aparelho de inserção . . . . .	25

3.1.2.1	Cimento, gengiva e processo alveolar . . . . .	25
3.1.2.2	Ligamento periodontal . . . . .	28
3.1.3	Suprimento sanguíneo, linfático e nervoso . . . . .	31
3.2	Modelagem matemática . . . . .	32
3.2.1	Equações diferenciais . . . . .	33
3.2.2	Métodos de solução de sistemas . . . . .	36
3.2.2.1	Método de Newton-Raphson . . . . .	37
3.2.3	Estimativa de erro . . . . .	40
3.3	Propriedades físicas dos materiais . . . . .	43
3.3.1	Alterações de estado . . . . .	43
3.3.2	Ligações interatômicas . . . . .	44
3.3.3	Distância interatômica . . . . .	46
3.3.4	Energia de ligação . . . . .	47
3.3.5	Energia térmica . . . . .	48
3.3.6	Estrutura cristalina . . . . .	49
3.3.7	Estrutura não cristalina . . . . .	50
3.3.8	Tensão e deformação . . . . .	51
3.3.9	Difusão . . . . .	51
3.3.10	Adesão e união . . . . .	52
3.3.11	Energia de superfície . . . . .	53
3.3.12	Umedecimento . . . . .	54
3.3.13	Ângulo de contato . . . . .	55
3.4	Noções de teoria do contínuo . . . . .	57
3.4.1	Cinemática do contínuo . . . . .	57
3.4.2	Campos de deslocamentos . . . . .	57



3.4.3	Movimento de corpo rígido . . . . .	58
3.4.4	Deformações . . . . .	59
3.4.5	Equações de compatibilidade . . . . .	62
3.4.6	Tensão . . . . .	63
3.4.7	Estado plano de tensões . . . . .	68
3.4.8	Estado plano de deformações . . . . .	70
3.4.9	Tensões e deformações principais . . . . .	71
3.4.10	Elasticidade . . . . .	74
3.4.11	Equilíbrio de forças . . . . .	75
3.4.11.1	Trabalho das forças internas . . . . .	76
3.4.11.2	Trabalho das forças externas . . . . .	76
3.4.12	Equação constitutiva: estado plano de deformações . . . . .	77
3.4.13	Flexibilidade e resiliência . . . . .	78
3.4.14	Força de impacto . . . . .	79
3.4.15	Deformação permanente . . . . .	80
3.4.16	Ductilidade e Maleabilidade . . . . .	80
3.4.17	Dureza . . . . .	80
3.4.18	Reologia . . . . .	81
3.4.19	Critérios de escoamento . . . . .	83
3.5	Teoria do Contato . . . . .	85
3.6	Teoria de Mola . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Método dos elementos finitos. . . . .</b>	<b>93</b>
4.1	Tipos de análise . . . . .	94
4.2	Fundamentos do MEF . . . . .	95
4.2.1	Método dos resíduos ponderados . . . . .	96

4.2.2.	Formulação variacional . . . . .	97
4.3	Elementos finitos bidimensionais . . . . .	98
4.3.1	Estado plano de deformações . . . . .	98
4.3.2	Elementos triangulares . . . . .	99
4.3.2.1	Funções de forma . . . . .	100
4.3.2.2	Elementos triangulares de primeira ordem . . . . .	100
4.3.2.3	Elementos triangulares quadráticos . . . . .	101
4.4	Exemplos de elementos da biblioteca ANSYS . . . . .	101
4.4.1	Elemento plano triangular PLANE2 . . . . .	102
4.4.2	Elementos de contato . . . . .	103
4.4.2.1	TARGE169 . . . . .	104
4.4.2.2	CONTA172 . . . . .	105
4.4.3	Elemento de mola COMBIN40 . . . . .	106
4.4.3.1	Matrizes elementares associadas ao COMBIN40 . . . . .	108
4.4.3.2	Determinação de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Simulações . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1	Geometria das estruturas . . . . .	111
5.1.1	Dente . . . . .	112
5.1.2	Periodonto . . . . .	114
5.2	Simulação computacional . . . . .	115
5.2.1	Aquisição da imagem . . . . .	118
5.2.2	Tratamento da imagem . . . . .	118
5.2.3	Geração de arquivos compatíveis . . . . .	118
5.2.4	Exportação de arquivos para o ANSYS . . . . .	118
5.2.5	Ajuste do modelo . . . . .	119

5.2.6	Avaliação do modelo . . . . .	120
5.2.7	Simulação do ligamento periodontal com elemento plano (PLANE2) . . . . .	130
5.2.8	Simulação do ligamento periodontal com elemento de mola (COMBIN40) . . . . .	136
5.2.9	Simulação do ligamento periodontal com elementos de contato (TARGE169 e CONTA172) . . . . .	143
5.2.10	Avaliação da estabilidade dos modelos . . . . .	151
5.2.11	Abordagem não-linear para módulos de elasticidade do ligamento periodontal . . . . .	152
5.2.12	Extensão dos resultados . . . . .	159
5.3	Análise dos resultados . . . . .	162
5.3.1	Simulação com elementos de estado plano . . . . .	166
5.3.2	Simulação com elementos de mola . . . . .	167
5.3.3	Simulação com elementos de contato . . . . .	168
5.3.4	Abordagem não-linear para módulos de elasticidade do ligamento periodontal . . . . .	170
<b>6</b>	<b>Conclusões e sugestões de continuidade.</b> . . . . .	<b>171</b>
6.1	Conclusões . . . . .	171
6.2	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	172
	<b>Glossário . . . . .</b>	<b>174</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>177</b>

## Lista de figuras

3.1	RADIOGRAFIA EXPANDIDA E IDENTIFICAÇÕES TECIDUAIS . . . . .	23
3.2	REPRESENTAÇÃO DIAGRÁMATICA DOS TECIDOS DENTAIS . . . . .	23
3.3	FEIXES ORIENTADOS DE FIBRAS GENGIVAIS. . . . .	26
3.4	DESENHO ESQUEMÁTICO DAS FIBRAS FORMADORAS DO LIGAMENTO PERIODONTAL . . . . .	30
3.5	RETAS TANGENTES EM $(x^i, f(x^i))$ . . . . .	39
3.6	MODELO DE REDE CRISTALINA . . . . .	49
3.7	ILUSTRAÇÃO ESQUEMÁTICA DO DESENVOLVIMENTO DE ENERGIAS DE SUPERFÍCIE . . . . .	54
3.8	BOLHAS DE AR EM IRREGULARIDADES DA SUPERFÍCIE . . . . .	55
3.9	PARALELOGRAMO INFINITESIMAL . . . . .	59
3.10	PARALELOGRAMO E SUAS DEFORMAÇÕES . . . . .	60
3.11	DECOMPOSIÇÃO DA TENSÃO TOTAL NAS SUAS COMPONENTES NO PLANO . . . . .	64
3.12	REPRESENTAÇÃO DAS TENSÕES EM ELEMENTO INFINITESIMAL TRIDIMENSIONAL . . . . .	65
3.13	ESQUEMA SIMPLIFICADO DE UMA PLACA FINA SUBMETIDA A UM ESTADO PLANO DE TENSÕES . . . . .	68
3.14	ESQUEMA DE ELEMENTO INFINITESIMAL SUJEITO A TENSÕES PLANAS. . . . .	69
3.15	ESQUEMA SIMPLIFICADO DE UM CORPO (BARRAGEM) SUBMETIDO A UM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES . . . . .	70

3.16	ESQUEMA DE DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA UM MATERIAL SIMILAR AO AÇO ESTRUTURAL (FORA DE ESCALA) . . . . .	74
3.17	ESQUEMA DE CISALHAMENTO EM UM LÍQUIDO . . . . .	81
3.18	ESQUEMA DE CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO PARA FLUÍDOS . . . . .	82
3.19	ELIPSE DE MISES . . . . .	84
3.20	SUPERFÍCIES DE POTENCIAL CONTATO E DO GAP ENTRE ELAS, TEMPO $t=0$ . . . . .	85
3.21	ESBOÇO DE DOIS CORPOS EM CONTATO EM UMA INTERFACE $\Gamma_c$ , NO TEMPO $t$ . . . . .	86
3.22	DEFINIÇÃO DAS COMPONENTES DO CONTATO . . . . .	89
3.23	ELEMENTO DE MOLA DE MAXWELL . . . . .	91
4.1	ESQUEMA DE ELEMENTO QUADRILATERAL GENÉRICO . . . . .	98
4.2	ELEMENTO PLANE2 . . . . .	102
4.3	ELEMENTOS TARGE169 E CONTA172, FORMATO PARABÓLICO . . . . .	104
4.4	ELEMENTO COMBIN40 . . . . .	107
5.1	MODELO DENTÁRIO INICIAL . . . . .	112
5.2	APLICAÇÃO DA FORÇA NO PLANO DE CORTE VISTÍBULO-LINGUAL . . . . .	115
5.3	ARQUIVO IGES PARA TRATAMENTO PELO ANSYS . . . . .	119
5.4	MODELO AJUSTADO PARA TRABALHO NO ANSYS . . . . .	120
5.5	MODELO PARA AVALIAÇÃO . . . . .	121
5.6	MODELO COM RESTRIÇÃO IMPOSTA E CARGA APLICADA . . . . .	122
5.7	MODELO ALB4 – MALHA . . . . .	123

5.8	MODELO ALB4 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) E REGIÃO EM DESTAQUE PARA COMPARAÇÃO COM O ARTIGO ALBUQUERQUE ET AL. (2003) . . . . .	124
5.9	MODELO ALB4 – DEFORMAÇÕES EM y . . . . .	124
5.10	MODELO DENTÁRIO PROPOSTO . . . . .	125
5.11	CIM1 – MALHA . . . . .	127
5.12	CIM2 – MALHA . . . . .	127
5.13	CIM1 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) . . . . .	128
5.14	CIM2 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) . . . . .	128
5.15	CIM1 – DEFORMAÇÕES EM y . . . . .	129
5.16	CIM2 – DEFORMAÇÕES EM y . . . . .	129
5.17	CIM3 – MALHA . . . . .	132
5.18	CIM3 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) . . . . .	132
5.19	CIM3 – DEFORMAÇÕES EM y . . . . .	133
5.20	CIM3 – TENSÕES DE VON MISES. . . . .	133
5.21	CIM3 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS . . . . .	134
5.22	CIM3 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA . . . . .	135
5.23	CIM3 – DETALHAMENTO DOS VETORES DE TENSÕES NA REGIÃO DO LIGAMENTO PERIODONTAL. . . . .	135
5.24	CIM4 - MALHA . . . . .	138
5.25	CIM4 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) . . . . .	139
5.26	CIM4 – DEFORMAÇÕES EM y . . . . .	139
5.27	CIM4 – TENSÕES DE VON MISES. . . . .	140
5.28	CIM4 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS . . . . .	140

5.29	CIM4 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA .....	141
5.30	CIM4 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO CERVICAL .....	141
5.31	CIM4 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO APICAL .....	142
5.32	CIM4 – DETALHAMENTO DOS VETORES DE TENSÕES NA REGIÃO DO LIGAMENTO PERIODONTAL .....	142
5.33	CIM5 – MALHA .....	144
5.34	CIM5 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) .....	144
5.35	CIM5 – DEFORMAÇÕES EM y .....	145
5.36	CIM5 – TENSÕES DE VON MISES .....	145
5.37	CIM5 - GAP .....	146
5.38	CIM5 – DESLIZAMENTO .....	147
5.39	CIM5 – TENSÕES .....	147
5.40	CIM5 – PENETRAÇÕES .....	148
5.41	CIM5 – STATUS .....	148
5.42	CIM5 – CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA .....	149
5.43	CIM5 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO CERVICAL .....	149
5.44	CIM5 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO APICAL .....	150
5.45	CIM5 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS .....	150
5.46	MODELO COM RESTRIÇÃO IMPOSTA E CARGA APLICADA .....	152
5.47	CURVATURAS CARGA X MÓDULO DE ELASTICIDADE PROPOSTAS POR YOSHIDA ET AL. (2001) .....	155
5.48	CURVATURAS CARGA x DESLOCAMENTOS PROPOSTAS .....	156
5.49	COMPARATIVO ENTRE OS MÓDULOS PROPOSTOS .....	157
5.50	DESLOCAMENTOS EM UM NÓ DE CONTROLE (NÓ 4905) .....	157
5.51	COMPARATIVO DESLOCAMENTO x MÓDULO DE ELASTICIDADE ....	158

5.52	MÓDULOS CONSIDERANDO TOLERÂNCIA DE 21,74% . . . . .	159
5.53	DESLOCAMENTOS OBTIDOS – CARGA 1 N, $\nu = 0,49$ . . . . .	160
5.54	ENSAIO DO MODELO PROVATIDIS – CARGA 1 N, $\nu = 0,49$ . . . . .	161
5.55	DESLOCAMENTOS OBTIDOS – CARGA 1,82 N, $\nu = 0,475$ . . . . .	161
5.56	ENSAIO DO MODELO PROVATIDIS – CARGA 1,82 N, $\nu = 0,475$ . . . . .	162
5.57	COMPARATIVO DA TENSÕES DE MISES . . . . .	164
5.58	COMPARATIVO DAS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES PRINCIPAIS . . . . .	165



## Lista de tabelas

4.1	TIPOS DE SEGMENTOS TARGE169 E GRAUS DE LIBERDADE . . . . .	105
5.1	DIMENSÃO MÉDIA, mm, INCISIVO CENTRAL SUPERIOR . . . . .	112
5.2	DIMENSÕES DO DENTE EM ESTUDO . . . . .	113
5.3	COMPOSIÇÃO E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS . . . .	113
5.4	AVALIAÇÃO DO MODELO . . . . .	122
5.5	MODELOS COMPUTACIONAIS GERADOS E CONFIGURAÇÕES . . . . .	126
5.6	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS ALB4, CIM1 E CIM2. . . . .	126
5.7	COMPARAÇÃO – CIM3 VERSUS MODELO DE REFERÊNCIA CIM2 . . . .	131
5.8	COMPARAÇÃO – CIM4 VERSUS MODELO DE REFERÊNCIA CIM2 . . . .	138
5.9	COMPARAÇÃO – CIM5 VERSUS MODELO DE REFERÊNCIA CIM2 . . . .	143
5.10	DADOS SEGUNDO O ARTIGO DE REFERÊNCIA . . . . .	153
5.11	RESULTADOS OBTIDOS NO MEF . . . . .	154
5.12	PARÂMETROS PARA MODELAGEM . . . . .	159

## Lista de símbolos

$x, y, z$	coordenadas retangulares.
$P(x,y,z)$	ponto no espaço tridimensional cartesiano, configuração indeformada
$P'()$	ponto no espaço tridimensional cartesiano, configuração deformada
$\vec{v}$	vetor velocidade
$\vec{u}$	vetor deslocamento
$\delta\vec{u}$	deslocamento virtual
$u, v, w$	componentes de deslocamentos nas direções x, y e z, respectivamente
$e(x)$	função erro
$U$	energia total de deformação
$\ e\ _E$	norma da energia
$W$	trabalho
$k_i, k_f$	energia cinética inicial e energia cinética final
$\alpha$	coeficiente de expansão térmica
$l$	comprimento
$\Delta t$	variação de tempo
$\vec{X}$	vetor posição na configuração indeformada)
$\vec{x}(\vec{X}, t)$	vetor posição na configuração deformada
$\vec{c}(t)$	vetor deslocamento como função do tempo
$\mathbf{T}$	matriz de transformação
$\mathbf{R}(t)$	tensor rotacional
$\vec{\varepsilon}$	vetor de deformações
$\delta\vec{\varepsilon}$	deformação virtual

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	deformações nas direções $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	deformações principais, o mesmo que $\varepsilon_{max}$ , $\varepsilon_{min}$ ,
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	deformações angulares nos planos $xy$ , $xz$ e $yz$ , respectivamente
$\gamma_{max}$	deformação angular máxima
$E$	módulo de elasticidade de Young ou longitudinal
$G$	módulo de elasticidade transversal
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\vec{b}$	força de corpo
$\vec{p}$	força de superfície
$B$	corpo
$\Omega$	domínio
$\Omega^A, \Omega^B$	regiões $A$ e $B$ do domínio $\Omega$
$\Gamma$	contorno do domínio $\Omega$
$\Gamma_c$	superfície de contato
$\mathbf{n}^A, \mathbf{n}^B$	versores normais às regiões $\Omega^A, \Omega^B$
$\mathbf{s}^A, \mathbf{s}^B$	versores tangenciais às regiões $\Omega^A, \Omega^B$
$V$	volume
$K$	constante proporcionalidade
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez dos materiais
$\vec{f}$	vetor força

$\vec{f}_N$	componente normal de uma força
$\vec{\sigma}$	tensão no elemento de área
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	tensões nas direções $x, y$ e $z$ , respectivamente
$\sigma_\theta$	tensão normal em um plano inclinado qualquer de $\theta^0$
$\sigma_1, \sigma_2$	tensões principais, o mesmo que $\sigma_{max}$ e $\sigma_{min}$
$\sigma_{eqv}$	tensão equivalente ou tensão de Von Mises
$\tau_{xy} .. \tau_{zx}$	tensões cisalhantes
$\tau_\theta$	tensão cisalhante em um plano inclinado qualquer de $\theta^0$
$\tau_{max}$	tensão cisalhante máxima
$f(\bullet), \Phi(\bullet)$	função generalizada
$\tilde{f}(\bullet)$	função aproximada de $f(\bullet)$
$R(\bullet)$	função resíduo
$\xi(t)$	função peso relativa a variável $t$
$N_i$	função de forma
$L$	conjunto auxiliar de coordenadas cartesianas para elementos triangulares
$p(x)$ e $b(x)$	carga por unidade de comprimento e força de corpo
$T$	índice de relaxação
$g(.)$	função gap
$u^A, u^B$	deslocamentos nas regiões $\Omega^A$ e $\Omega^B$ , respectivamente
$\delta$	deslocamento $u^A - u^B$

$\mathbf{Q}$	tensor de transformações ortogonais
$\psi(\delta, n^B)$	função escalar que identifica uma interface potencial
$\delta_n$	produto escalar $\delta \cdot n^B$
$\delta_i$	módulo de $\delta$
$\mu$	coeficiente de atrito
$\dot{u}(\mathbf{x}, t)$	velocidade tangencial
$y(\mathbf{x}, t)$	ponto no contorno $S^B$ mais próximo do ponto $x$ no contorno $AS$
$\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_v$	deformação elástica, deformação viscosa
$\mathcal{E}_0$	deformação no tempo $t = 0$
$\dot{\mathcal{E}}$	velocidade de deformação
$\sigma_0$	tensão no tempo $t=0$
$\eta$	coeficiente de viscosidade
$\vec{\sigma}^A, \vec{\sigma}^B$	vetores de tensão nas regiões $\Omega^A, \Omega^B$
$\lambda$	componente das normais $\mathbf{n}^A, \mathbf{n}^B$
$c$	componente tangencial em $\mathbf{s}^A, \mathbf{s}^B$

## Resumo

O Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo amplamente utilizado, por meio de simulações computacionais, na abordagem de problemas biomecânicos. Na Odontologia, mais especificamente, o método é empregado na investigação dos comportamentos relativos aos diversos materiais componentes do sistema dentário e na observação de componentes artificiais que devam desempenhar ações originalmente atribuídas aos componentes do dente e do periodonto.

Dos materiais envolvidos, um de relevante significado e de dificuldade singular quanto à modelagem é o Ligamento Periodontal (LP), que suscita um desafio: conhecer melhor a respeito da simulação desse ligamento, investigando as vantagens de uma determinada opção de elemento de interface sobre as demais e avaliando variações comportamentais quando da mudança de parâmetros físicos.

Para a simulação computacional, utilizou-se a imagem de um dente incisivo central maxilar, submetido a dimensionamentos constantes da literatura e implementado no MEF com uso do software comercial ANSYS® versão 7.0 onde se realizou uma abordagem bidimensional de três diferentes formulações matemáticas: elementos de estado plano de deformações, elementos de contato e elementos de mola, para a avaliação do comportamento biomecânico do ligamento periodontal, bem como para a análise de uma proposição não-linear para a definição de seu módulo de elasticidade. Os materiais foram considerados lineares, estáticos e isotrópicos. As observações restringiram-se ao campo de pequenos deslocamentos.

Os resultados obtidos permitem ao projetista optar pela utilização de determinada formulação com conhecimento prévio do tipo de comportamento que será privilegiado, não descuidando, porém, dos erros impostos por cada uma das opções. Também, como contribuição, está a discussão de métodos para aproximação do valor do módulo de elasticidade do ligamento periodontal, visto que não há valores tabelados a serem utilizados nas simulações, tampouco maneiras eficientes de estimá-los.

**Palavras-chave:** Ligamento periodontal, método dos elementos finitos, análise biomecânica, teoria do contato, teoria de mola e estado plano de deformações.

# Abstract

The Finite Element Method (FEM) is a method that has been widely used, by means of computational simulations, in approaching and solving problems concerning biomechanics. Odontology, specifically, has made use of it in the investigation of the behaviour of different components, which makes part of a composite in the dental system and, at observation of artificial components who must play the same original role attributed to dental components and periodont.

Among the materials used, one presents a significant and singular difficulty, when modeling, it is the Periodontal Ligament (PL), which sets a challenge: to acquire the best knowledge on simulating the periodontal ligament; investigating the advantages for a specific option between elements of interface over any other element and so evaluating behavioural variations when physical parameters are changed.

To carry out that computational simulation it has been used a central maxillary incisor image. That image was built according to the measures provided by technical literature, and performed on FEM using a commercial software ANSYS® version 7.0. On FEM, a bi-dimensional approach, of three different mathematical formulations, was realized: plane strain elements, contact elements and spring elements. Those formulations are realized to evaluate the mechanical behaviour of periodontal ligament and analyze a non-linear formulation to estimate its elastic modulus. The materials are considered linear, static and isotropic. The field of small displacements limits the observations.

The achieved results allow that the designers choose to employ a determined formulation with previous knowledge of what kind of behaviour will be privileged,. This procedure doesn't neglect, however, imposed errors by each one of choices. In addition to that, there is also a contribution to the discussion about the use of approximation methods to evaluate the periodontal ligament elastic modulus, since there is no chart of values that can be used on those simulations, neither any efficient manner to estimate them.

**Keywords:** Periodontal ligament, finite element method, biomechanics analyses, contact theory, spring theory, plane strain theory.

# Capítulo 1

## Introdução

Dentes naturais são sistemas compostos, desenvolvendo funções tácteis, mastigatórias, fonatórias, estéticas, de transporte e defesa (DELLA SERRA & FERREIRA, 1981).

Dada a gama de atividades para as quais o órgão dentário se apresenta, é perceptível a importância que o mesmo adquire no dia-a-dia das espécies animais, inclusive a humana.

Se o Homem tem a capacidade de reconhecer as diferenças entre mecanismos diversificados e estabelecer suas respectivas regras de funcionamento, bem como suas propriedades físicas e químicas, tirando proveito desse conhecimento, é útil que tenha a habilidade de identificar, qualificar e quantificar os organismos biológicos, quer desempenhem funções vitais ou não, dentre eles os dentes.

Da avaliação do sistema dentário e de suas diversas partes componentes, cada qual com atividades bem definidas, surge a necessidade de se desenvolverem mecanismos que auxiliem na compreensão do processo de formação desse sistema, bem como de seu comportamento, relacionamento com as demais integrantes do sistema, dos riscos a que estão submetidos, do tempo de vida útil e outras características.



Com o desenvolvimento científico, tornou-se possível qualificar e quantificar muitas dessas propriedades orgânicas, permitindo inclusive a recriação de modelos sintéticos que reproduzissem o funcionamento dos órgãos substituídos, como é o caso dos dentes.

A evolução nos conhecimentos sobre as propriedades físicas e químicas dos materiais, o aperfeiçoamento de técnicas de simulação, o aprimoramento de máquinas e programas que permitem simulações computacionais de componentes biológicas, tudo isso traz a necessidade de se incrementar a habilidade para identificar uma célula, tecido ou órgão, bem como a capacidade de se estabelecer quais os parâmetros mínimos necessários para uma simulação em ambiente computacional ou na elaboração de próteses com materiais sintéticos.

Dentre as diversas componentes do sistema dentário, o ligamento periodontal (PDL) tem se mostrado um desafio para a pesquisa, mercê da dificuldade de se efetuarem pesquisas tanto *in vivo* quanto *in vitro*. As dificuldades nos ensaios *in vivo* residem na baixa tolerância do animal a dor, não disponibilidade de espaço hábil para manuseio e falta de equipamento compatível com as dimensões e características do tecido. As dificuldades *in vitro*, basicamente, verificam-se na alteração das propriedades sofrida pelo tecido quando separado do meio vital.

## 1.1 Motivações

A área de pesquisa biomecânica há muito tem se servido de modelos e simulações computacionais. Tais modelos visam auxiliar na predição do comportamento mecânico das componentes biológicas em face da dificuldade e até impossibilidade de medições diretas.

Análises de trajetórias de segmentos de um corpo, quando submetidos à forças e momentos, têm auxiliado na compreensão dos padrões de atividades dos sistemas em estudo. Em contraponto, esse reconhecimento de padrões auxilia na determinação de metodologias de correção cujo objetivo, em bioengenharia, é trazer o organismo à saúde clínica.

O uso de modelos de elementos finitos tem permitido determinar as tensões e deformações às quais estão sujeitas as componentes biológicas. A possibilidade de

recriar o modelo físico (geométrico) de um problema e particioná-lo, a fim de compreender o comportamento em cada partição, ou elemento finito, bem como integrar as soluções elementares com a finalidade de obter-se uma análise global do mesmo, tem proporcionado a esse método uma popularidade significativa. Alie-se a isso, a robustez matemática do método o que o torna uma ferramenta segura e de relativo grau de facilidade no manuseio.

Pesquisas envolvendo implantes e próteses têm sido simuladas computacionalmente, avaliando as possibilidades de complicações biomecânicas proporcionadas pelas diferenças de mobilidade e formas de absorver e distribuir cargas funcionais. No entanto, a ausência ou deficiência na modelagem do ligamento periodontal tem estimulado à investigação da contribuição desse tecido sobre os resultados daqueles ensaios.

O ligamento periodontal, responsável pela absorção e redistribuição de tensões advindas do impacto sobre os dentes e transmitidas aos ossos e demais tecidos adjacentes, atua como um amortecedor natural das tensões às quais o sistema mastigatório está submetido.

Dada a importância reconhecida do PDL, diversos trabalhos têm sido divulgados com o intuito de se aproximar uma simulação ideal para o tecido. Muitas dificuldades, porém, têm sido apresentadas, dentre elas a definição de valores viáveis para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Além disso, a maioria dos estudos considera os tecidos envolvidos como isotrópicos, homogêneos em seus limites e lineares, o que de antemão acarreta uma não correlação com a presença dos fluídos tissulares e seus princípios viscoelásticos (anisotropia, heterogeneidade e não-linearidade).

A menos dos estudos visando substituir o PDL ausente por um material sintético a fim de resgatar-se a capacidade de absorção e distribuição de cargas, na prática os implantes são atados diretamente ao osso, descarregando tensões e atritos nos próprios implantes e ossatura de suporte, gerando desgaste das estruturas com possibilidades de danos biomecânicos (VOSGERAU, 2002).

A motivação do presente trabalho originou-se na possibilidade de se estudar o ligamento periodontal, envolvendo a idéia de classificá-lo adequadamente segundo o seu papel biomecânico, tendo por hipótese básica sua atuação no amortecimento e distribuição de tensões e pondo os seguintes questionamentos: Qual a reação desse sistema a um carregamento? Que tipo de elemento de interface reproduz seu

comportamento? Quais as relações entre as tensões e deformações a que o sistema está sujeito?

## 1.2 Metodologia

O processo de análise envolveu desde a aquisição de imagem e seu respectivo tratamento, até a simulação de modelos computacionais utilizando-se de 3 diferentes formulações matemáticas: elementos de estado plano, elementos de mola e elementos de contato, para a simulação do ligamento periodontal. Os resultados obtidos com cada uma das formulações foram comparados entre si e com os dados constantes da literatura, identificando-se qual desses elementos se apresentava mais conveniente à simulação computacional do tecido. Além disso, foi avaliada uma proposição não-linear para a estimativa do módulo de elasticidade do ligamento periodontal.

O desenvolvimento do presente trabalho assentou-se na submissão de uma imagem de um incisivo central maxilar em corte na direção vestibulo-lingual (disponível na rede mundial de computadores), a um tratamento de imagem em ambientes CAD (*Computer Aided Design*) e geração de imagem IGES (*Initial Graphics Exchange Specifications*) para leitura posterior no aplicativo ANSYS®.

Os modelos gerados a partir da imagem matriz receberam novo tratamento de imagem a fim de viabilizar a criação de malhas de elementos finitos, onde foram observadas as seguintes diretrizes:

- a) Identificação de dimensões e composição das partes integrantes – utilização dos dados constantes em Wheeler (1974), Lindhe (1992), Della Serra & Ferreira (1981), Carranza (1992) e Lascalea & Moussalli (1995);
- b) Definição dos parâmetros materiais envolvidos – literatura mencionada e artigos;
- c) Estudo das relações biomecânicas do sistema no enfoque dado pelos artigos;
- d) Simulação em malha de elementos finitos utilizando elementos triangulares de 6 nós, no estado plano de deformações;
- e) Compatibilização entre os resultados obtidos pelo método de elementos finitos e os dados oriundos das relações biomecânicas (necessário para

assegurar que os resultados obtidos estejam no domínio do problema) – adequando a capacidade de cargas, propriedades elásticas, resposta a estímulos neurais;

- f) Submissão de novos modelos com elementos de interface diferenciados – utilização de elementos de contato e de mola;
- g) Avaliação do ganho proporcionado pela utilização do método dos elementos finitos (MEF) no âmbito dos métodos numéricos em engenharia, haja vista a dificuldade natural de se obterem ensaios *in vivo*;
- h) Avaliação do comportamento desejado de um material que supostamente substitua o ligamento periodontal. Definição das curvas de tensão e deformação, valores funcionais para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Os resultados alcançados explicitaram, tanto quanto possível, as propriedades físicas e químicas às quais os materiais estiveram submetidos, bem como mantiveram relação direta com as leis constitutivas que postulam o comportamento do ligamento.

### 1.3 Objetivo do trabalho

O presente trabalho teve por objetivo a análise de 3 diferentes formulações matemáticas, a fim de assegurar uma representação satisfatória das relações de tensões e deformações suportadas pelo ligamento periodontal, definindo a qualidade das diferenças existentes entre a abordagem pelo uso de uma ou outra das formulações.

Dentre as propriedades físicas, o destaque foi dado para o módulo de elasticidade haja vista a diversidade de valores em uso na literatura corrente e a falta de critério definido para o estabelecimento do mesmo. Assim, visou-se a avaliação de uma metodologia para a estimativa de seu valor, considerando a proposição de não-linearidade verificada pelas particularidades do tecido.

Para validação dos ensaios, os modelos obtidos da primeira fase, com a escolha da melhor interface, foram submetidos aos módulos de elasticidade

calculados segundo a proposição do presente trabalho e os resultados conferidos com o divulgado na literatura de referência.

O presente trabalho visou dar sustentabilidade ao desenvolvimento de modelos computacionais que representassem um meio orgânico e complexo como o ligamento periodontal.

## **1.4 Estrutura da dissertação**

O capítulo 2 traz uma revisão dos principais artigos avaliados durante o processo de aquisição do conhecimento relacionado às várias abordagens do tema. Da revisão bibliográfica consta, ainda, o resumo das idéias tratadas naqueles artigos e de trato relevante, seja diretamente pelo uso na formulação da pesquisa envolvida no presente trabalho, seja pelo vínculo estabelecido com os vários tópicos teóricos envolvidos.

O capítulo 3 expõe os conceitos teóricos concernentes a: dentes e seu ligamento periodontal; modelos matemáticos e sua representação por equações diferenciais, bem como considerações sobre métodos de solução e estimativa de erros; conceitos físicos e químicos sobre os materiais; noções das teorias do contínuo, do contato e de molas.

Acrescente-se, ainda, que tal nível de abordagem foi avaliado como pertinente visto que o presente trabalho agrega pontos de vista de profissionais de áreas distintas como odontólogos, matemáticos e engenheiros, sendo, tanto a terminologia utilizada como as teorias envolvidas de conhecimento específico de cada área de atuação.

O capítulo 4 trata da descrição do Método dos Elementos Finitos, constando de um resumo do método, sua evolução e uso nas variadas possibilidades de abordagem, bem como as idéias de ponderação de resíduos e princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Tal capítulo está destacado da fundamentação teórica, primeiro pela necessidade de clareza no tratamento do assunto, depois, por ser o foco da abordagem o tratamento do problema por um método numérico e, por último, para evitar que o método fosse visto como continuação em particular de qualquer

das teorias vistas no capítulo 3. Consta, ao final do capítulo, uma descrição das formulações dos elementos utilizados no processo de simulação computacional.

O capítulo 5 apresenta o problema da simulação segundo a metodologia proposta na seção 1.2, visando estabelecer a evolução dos processos desde a aquisição e tratamento da imagem, a simulação com as diferentes interfaces, a análise dos resultados e considerações sobre a conveniência na escolha do elemento de interface. As figuras representativas da pesquisa, as tabelas com dados materiais e resultados, bem como gráficos explicativos documentam o capítulo.

As conclusões e sugestões de trabalhos futuros estão apresentadas no capítulo 6.

Um glossário foi agregado ao pós-texto haja vista a necessidade de se estabelecer uma capacitação mínima para a compreensão da terminologia peculiar a cada área de atuação.

## **Capítulo 2**

### **Revisão da literatura**

O presente capítulo contempla a descrição dos artigos revistos e relacionados com a simulação computacional de sistemas dentários, indo além da preocupação específica com o ligamento periodontal, incluindo-se a estrutura dentária como um todo. As seções estão organizadas de maneira a possibilitar a identificação dos textos relacionados com as teorias abordadas no presente trabalho: contínuo, contato e molas.

#### **2.1 Simulações com elementos planos e espaciais**

Rees & Jacobsen (1997) usaram uma malha de elementos finitos bidimensionais em estado plano de deformações para modelar um pré-molar inferior sujeito a dois regimes de carga. Além disso, promoveram uma releitura de diversos artigos a fim de levantar as proposições desses artigos para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson relativos ao PDL. Experimentaram uma variação de módulos de elasticidade para uma mesma carga, traçando duas curvas comportamentais (deslocamentos horizontais e verticais) para o ligamento

periodontal. Valores obtidos computacionalmente e registrados na literatura foram então impostos às curvas para aferição dos valores de PDL.

Williams, K. R. & Williams, A. D. C. (1997) avaliando a arbitrariedade da escolha de impulsos e frequências para simulação de osseointegração e a conseqüente divergência com os valores encontrados clinicamente, propuseram uma avaliação segundo o MEF para determinação de intervalos de impulsos. Foram examinadas duas situações: pino simples e pino com cantilever. A análise dinâmica indicou que as frequências e deslocamentos eram sensíveis a duração do impulso e a sua direção, mas praticamente independente da magnitude.

Las Casas *et al.* (1999) descreveram diferentes estratégias para simulação de estruturas dentárias. Após revisão do *status* corrente para a pesquisa sobre propriedades mecânicas de tecidos dentários, condições de cargas e simulações em elementos finitos na odontologia, efetuaram o estudo de um problema com a finalidade de detectar as regiões de concentração de tensões. O exemplo utilizado foi modelado bidimensionalmente no aplicativo ANSYS, considerando o estado plano de deformações para uma imagem de um primeiro pré-molar superior e o foco da investigação deu-se na região da junção cimento-esmalte, a fim de detectar-se as causas que poderiam levar a perda de material dentário comum a essa região.

Yoshida *et al.* (2001) efetuaram estudo com objetivo de determinar as propriedades elásticas do PDL humano. Como modelo, utilizaram um incisivo maxilar central. O experimento consistiu em impor deslocamentos ao dente, via diferentes carregamentos aplicados de modo a passar pelo centro de resistência. Os resultados apresentados constatarem um incremento quase exponencial para o módulo de elasticidade do PDL, conseqüência de sua não-linearidade e, em contrapartida, incrementos logarítmicos para os deslocamentos. Dentre as considerações estabelecidas no artigo, salienta-se a observação de tomar-se modelos estabilizados em relação a carga, haja vista o efeito histerético, provavelmente viscoelástico do sistema.

Mellal *et al.* (2001) realizaram um estudo comparativo das distribuições de tensões na interface ao redor de implantes dentários. Para a realização do trabalho, duas situações foram examinadas: implante recente e implante osseointegrado. Para o modelo foram considerados dois comprimentos de implante, segundo uma representação tridimensional no MEF e submetido a cargas verticais e horizontais. Os resultados mostraram que as tensões no osso ao redor do implante são maiores



que antes da osseointegração e que implantes longos tendem a distribuir melhor as tensões.

Provatidis (2001) apresentou fórmulas para a determinação das mais importantes quantidades envolvidas em movimentos de translação dentária; são estas: a rigidez do suporte dentário na translação, a distribuição de deformações e tensões na membrana periodontal, o valor máximo de tensão hidrostática e a localização do centro de resistência. O modelo assumido baseou-se na representação da raiz de um incisivo maxilar central, utilizando-se de um parabolóide de revolução, onde as seguintes considerações foram estabelecidas: espessura uniforme para o ligamento periodontal; o ligamento é livre de tensão na porção cervical; o encapsulamento, formado pelo contorno exterior do modelo, é fixo e infinitamente rígido; a raiz, formando o contorno interior do modelo, é móvel e infinitamente rígida; o material do ligamento é homogêneo, isotrópico, linear, elástico, quase incompressível (coeficiente de Poisson  $\nu = 0,49$ ) e com previsão de pequenos deslocamentos. O modelo concentrou-se no comportamento do dente e não examinou o interior do PDL, o que é externado como um comportamento global do tecido. O modelo analítico apresentou grande acuracidade, com erro relativo menor que 0,8%; predição correta dos deslocamentos lineares, não conseguindo prever distribuições não-lineares; relacionamento entre o diâmetro e altura da raiz e os deslocamentos e a pressão hidrostática; localização da pressão máxima a, aproximadamente, 76% da raiz; do centro de resistência e percentagem da energia de deformação consumida pelas forças cisalhantes.

Provatidis (2001a) realizou um estudo para predição de movimento dentário quando sujeito a cargas. Considerando as propriedades fluídicas do ligamento periodontal, propôs a substituição do modelo elástico estabelecido por um novo modelo hidrodinâmico que incluísse incompressibilidade e fibras elásticas. O modelo em MEF foi gerado utilizando-se uma representação axissimétrica para um canino maxilar e os modelos, hidrodinâmico e elástico, foram comparados com movimentos ortodônticos de curta e longa duração.

Dorow, Krstin & Sander (2001) realizaram estudo para avaliar as propriedades mecânicas envolvidas na mobilidade de dentes laterais superiores, examinados *in vivo*. A deflexão dentária foi medida, considerando a influência do PDL, suas características viscoelásticas e comparado a resultados com aqueles obtidos da literatura.

Oomens *et al.* (2001) apresentaram um modelo tridimensional de contração muscular na tíbia anterior de um rato, para o qual assumiu-se não-linearidades, geométrica e física, dos músculos passivos, onde a tensão total foi derivada da adição da tensão ativa com a passiva. A contração foi avaliada segundo a equação de Huxley e a ativação de cálcio no músculo foi descrita por meio de um modelo cinético. O sistema foi resolvido com a implementação no MEF e utilizando-se o método Lagrangeano aumentado.

Betiol *et al.* (2001) efetuaram um estudo a fim de simular o comportamento biomecânico e avaliar a distribuição de tensões nas estruturas de suporte para uma prótese parcialmente fixa, com 4 elementos, sendo os pilares constituídos pelo primeiro pré-molar e por um implante no mesmo semi-arco, localizado na região do segundo molar, com conectores rígidos e submetido a forças oclusivas. Da comparação das tensões distribuídas detectou-se a maior concentração na região adjacente ao implante, podendo resultar na perda óssea e deficiência no tratamento proposto. Além disso, novas simulações: conector semi-rígido na região entre o primeiro molar e o implante, e conector semi-rígido entre primeiro pré-molar natural e segundo pré-molar, foram estabelecidas e comparadas, inclusive com a simulação de contato na interface.

Jolivet, Pomero & Skalli (2001) apresentaram um modelo tridimensional no MEF para a contração muscular. O princípio de simulação adotado considerou um exemplo de ativação de um músculo fusiforme, da parede gástrica lateral de um gato, simulado no aplicativo ANSYS. Elementos de volume representaram os componentes passivos enquanto elementos do tipo *link* simularam as fibras musculares. Um coeficiente de expansão foi utilizado para modelar a capacidade de contração das fibras. A checagem do modelo deu-se em condições isométricas e a investigação dos resultados obedeceu às mudanças na arquitetura do modelo durante a contração. A proposição de um modelo tridimensional visou suprir uma lacuna existente nos modelos atuais que simulam em separado as propriedades ativas e passivas do músculo.

Chabanas & Payan (2001), considerando as correções de mandíbula e maxila, destacaram a importância de reavaliar a distribuição do tecido facial após a correção. Um modelo 3-D no MEF, representando a face, foi apresentado, integrando camadas de pele e músculos com propriedades mecânicas específicas (módulo de elasticidade de 15 kPa e coeficiente de Poisson de 0,49 para pele

enquanto as fibras apresentaram um módulo de elasticidade variando de 6 a 10 kPa segundo o nível de atividade). O modelo geral foi automaticamente deformado para ajustar-se as condições do paciente, utilizando-se um algoritmo de registro dos dados elásticos. As irregularidades surgidas foram automaticamente corrigidas.

Oosterwyck *et al.* (2001) desenvolveram um algoritmo para simular a reabsorção óssea, investigando tensões e deformações no tecido ósseo marginal ao implante. O algoritmo foi aplicado a um modelo no MEF de um implante cilíndrico, circundado por um volume também cilíndrico, com elementos lineares hexaédricos, submetido a uma carga transversal de 15N e um momento de 75 Ncm e com propriedades elásticas, isotrópicas e uniformes. Os resultados encontrados permitiram concluir que sobrecargas iniciais podem proporcionar uma nova configuração de equilíbrio, tanto pela redistribuição de tensões quanto pela alteração na densidade do osso

Limbert *et al.* (2001) fizeram um estudo baseado em experimentos, desenvolvimentos analíticos e aproximações numéricas com o intuito de desenvolver um material polimérico que satisfizesse condições requeridas em cirurgia prostéticas maxilofaciais. Diversos testes de tensão e deformação foram realizados para a caracterização das propriedades dos materiais. A formulação hiper-elástica Mooney-Rivlin foi escolhida como descritora do comportamento constitutivo do polímero. Modelos em MEF foram implementados, reproduzindo todas as características dos testes de tensão.

Albuquerque *et al.* (2003) avaliaram a distribuição de tensão em um incisivo central maxilar, segundo a análise de estado plano de deformações, via MEF. O foco da investigação foi a comparação entre 4 diferentes meios de sustentação do vão do canal: polpa natural, aço inoxidável, fibra de carbono e titânio. Além da variação no tipo de material, também foram verificados 3 formatos diferentes para cada tipo de material não natural. Os resultados alcançados apontaram para um pequeno impacto na concentração de tensão, provocado pelos diferentes formatos. Em contrapartida, os tipos de materiais apresentaram variações significativas, tendo o aço apresentado o maior nível de concentração de tensão, seguido do titânio e da fibra de carbono.

Amarante (2003) apresentou um trabalho sobre a distribuição de tensões em uma dentina radicular restaurada com pinos intra-radulares confeccionados de diferentes materiais. Utilizou, para os ensaios, dois modelos bidimensionais de um

incisivo central superior. A simulação computacional foi efetuada com utilização do software ANSYS 7.0, utilizando-se elementos de estado plano de deformações e tendo sido carregados, os modelos, com uma força de 100 N em angulações de 45° e 180° em relação ao eixo longitudinal do dente. Os resultados indicaram concentração de tensões no porção apical dos pinos, sugerindo possíveis riscos de fratura na região. Como conclusão apresentou os pinos fundidos como tendo retido tensões no próprio pino aliviando a dentina radicular, portanto, se mostrando mais eficientes no caso de raízes desgastadas. Os pinos pré-fabricados observaram distribuição de tensões mais homogênea pelo dente e menor nível de tensões no pino, preservando o material restaurador, porém com maior exposição da dentina radicular.

Clement *et al.* (2004) demonstraram como gerar um modelo 3-D de um dente humano de raiz simples, usando um fluxo de trabalho automático, passível de implementação no MEF. Os dados advindos de tomografias (principalmente) foram filtrados, tendo sido guardado aqueles que continham informação relevante para a geração geométrica do modelo. A partir de então, o volume dentário foi recriado (inclusive o ligamento periodontal) utilizando-se elementos hexaédricos.

Cornacchia *et al.* (2004) apresentaram um trabalho sobre análise numérica de dentes restaurados com restaurações indiretas (preparadas fora do ambiente bucal e incorporadas ao dente por meio de procedimentos adesivos), tendo abordado seu comportamento mecânico e avaliado a distribuição de temperaturas devido ao aquecimento das cúspides e tensões oriundas da polimerização do cimento adesivo. O procedimento de pesquisa envolveu medida experimental de temperatura fora do ambiente bucal, simulação no MEF, comparação de resultados e análise das tensões geradas pela contração do cimento de fixação. A simulação no MEF constou de análise computacional tridimensional do segundo molar inferior, baseado no Atlas de anatomia odontológica de Wheeler.

Kawarizadeh *et al.* (2004) investigaram se a tensão ou a deformação dentro do PDL, ou mesmo no osso, desempenha um papel responsável pela iniciação de respostas biológicas relativas ao movimento ortodôntico. O experimento deu-se com ratos, nos quais foram provocados movimentos mesiais e dos quais foram acompanhadas as evoluções dos osteoclastos. Comparativamente, um modelo isotrópico, elástico e compressível de molar, baseado em seções histológicas, foi desenvolvido no MEF. Os resultados obtidos para as tensões e deformações no PDL

e osso alveolar foram comparadas com as distribuições dos osteoclastos. Os resultados indicaram que tensões normais e deformações, ambas compressivas, destacaram-se em regiões onde o número de osteoclastos era mais alto, enquanto as tensões e deformações positivas foram coincidentes com regiões de número reduzido de osteoclastos.

Lehmann, Elias e Gouvêa (2004) realizaram uma simulação tridimensional de implantes dentários a fim de comparar o implante cônico com o cilíndrico. O estudo foi realizado utilizando-se do MEF (ANSYS), a partir de desenhos comerciais dos modelos. Os resultados mostraram que o emprego de implantes cônicos minimizam a reabsorção óssea pois permitem melhor distribuição dos esforços. O trabalho apresentou, também, considerações importantes no aspecto de propriedade dos materiais, cargas de trabalho e restrições a deslocamentos.

Li *et al.* (2004) efetuaram uma investigação numérica a respeito da estrutura de uma ponte dentária. Para tal, um modelo tridimensional de um incisivo maxilar esquerdo artificial unido a um incisivo maxilar direito natural foi idealizado no MEF e construído segundo imagens de tomografias computadorizadas e modelos físicos. As distribuições de tensões e deformações na ponte, especialmente na união foram analisadas, onde constatou-se a alta concentração de tensões inversamente proporcional a rigidez do adesivo. A fim de promover a aferição dos resultados numéricos alcançados, promoveu-se a comparação com o modelo representado no MEF e testes físicos de carga, avaliando-se pico de tensão, rigidez estrutural, assim como localização de falhas.

Ribeiro (2004) realizou uma análise por meio do MEF, com relação a distribuições de tensões em dente com e sem remanescente coronário, utilizando diferentes pinos intra-radiculares. No processo, foi utilizando o elemento estrutural plano SOLID42, da biblioteca do ANSYS, para uma simulação computacional bidimensional de um dente incisivo central superior sem e com 2 mm de remanescente dentinário na porção coronária e submetido a uma carga de 100 N aplicado a 45° em relação ao longo eixo do dente. Utilizando-se como critério de julgamento a Tensão de Von Mises, concluiu-se pelas diferenças nas concentrações de tensões com relação aos diferentes materiais componentes dos pinos e a influência da inclusão de um remanescente dentinário de 2 mm favorecendo a distribuição das tensões na região cervical do elemento dental.

## 2.2 Simulações por Contato

Simo & Laursen (1992) apresentaram uma aplicação para o método Lagrangeano aumentado, em problemas envolvendo contatos com atrito. Dentre suas observações, destacaram a vantagem desse método sobre métodos mais tradicionais como o método de Lagrange e o método de penalidades na avaliação de restrições expressas por equações, assim como descreveram a extensão da técnica de Lagrangeano aumentado para abordagens de restrições impostas pelo atrito no contato e definidas por inequações, além de ser um método bem condicionado para implementação no MEF.

Bathé & Bouzinov (1997) analisaram problemas de contato e apresentaram considerações teóricas para a sua simulação. Revisaram a base teórica das funções de restrição e discutiram algumas importâncias características do método. Sua análise contempla abordagens estáticas e dinâmicas, inclusive atrito. Comparativamente efetuaram análises de casos diferenciados a fim de demonstrar a aplicabilidade de algoritmos que comportem funções de restrição para soluções de problemas complexos de contato.

Cummins & Spears (2002) realizaram uma simulação em elementos finitos, utilizando o estado plano de tensões, para representação de um incisivo central maxilar a fim de avaliar o efeito que os protetores de boca realizam no sistema dente-osso quando da submissão ao impacto, durante a realização de atividades esportivas. A investigação deu-se pela variação de espessura e da rigidez do material usado nos protetores. O processo constou da avaliação do modelo em comparação com estudos *in vivo* para o mesmo regime de cargas e deslocamentos. Nas regiões entre dentina e osso alveolar, percebidas como de potencial contato, os elementos de estado plano foram substituídos por elementos de contato. Após a avaliação do modelo, uma camada de protetor foi superposta e os ensaios deram-se pela variação das propriedades da camada protetora.

Gei, Genna & Bigoni (2002) avaliaram a insuficiência dos modelos de PDL lineares e apresentaram uma lei constitutiva para o comportamento não-linear da interface, baseada em uma interpolação dos modelos experimentais disponíveis. Comparativamente, estabeleceram modelos não-lineares bi e tridimensionais, no MEF, de uma porção da mandíbula. Dentre as constatações, destacou-se o fato de

que a consideração de valores constantes para a rigidez causa significativa diferença na distribuição de tensões, o modelo não-linear inclui predição de contato e permite obter resultados de tensões e deformações na região interna do PDL.

Pini *et al.* (2002) apresentaram um trabalho que é parte de um projeto que objetiva desenvolver um modelo constitutivo tridimensional para o PDL, de acordo com a identificação de seus parâmetros materiais. Uma porção da região de dentes molares, contendo PDL bovino, foi utilizada para obtenção de curvas de tensão e deformação, quando da aplicação de cargas. Após estabelecerem condições de conservação do tecido e de desenvolverem um aparato específico para testes de carregamento desse tipo de material, avaliaram a influência da espessura no módulo de elasticidade, resistência, deformação uniaxial máxima e densidade da energia de deformação. Os resultados obtidos foram analisados segundo as características das curvas, tanto no carregamento, quanto na liberação das cargas.

## **2.3 Simulações com molas**

Provatidis (2000) efetuou um estudo comparativo sobre mobilidade dentária usando 5 modelos hipotéticos do ligamento periodontal, tendo como referência um incisivo central maxilar. Os modelos foram implementados em MEF, considerando-se, entre eles, um modelo isotrópico, linear e elástico, sem fibras; três modelos anisotrópicos e não-lineares compostos por fibras em diferentes arranjos e orientações e um modelo ortotrópico, consistindo de um meio contínuo conjugado com fibras. Como resultado relevante, registraram que a análise linear, isotrópica e elástica apresentou centro de rotação (CRO) e centro de resistência (CRE) mais direcionado oclusalmente que os valores obtidos pela fórmula de Burstone, enquanto as fibras anisotrópicas apresentaram centros mais apicais e excêntricos.

## **2.4 Outros artigos de interesse**

Dai & Potts (1994) investigaram o comportamento de um elemento de interface de espessura zero. Tal investigação deveu-se a divergência de opiniões

quando da utilização do método. Para a avaliação utilizaram-se de exemplos para os quais era possível ressaltar as dificuldades numéricas, tendo assinalado que mal-condicionamento da matriz de rigidez e altos gradientes de tensão causavam instabilidade numérica. A fim de reduzir o mal-condicionamento propõem a escolha cuidadosa das medidas dos elementos 2-D adjacentes a interface. Dentre os resultados, salientaram que o uso do método de integração de Newton-Cotes não acrescia benefícios sobre o método de Gauss. Também verificaram a validade do uso de elementos de interface no estudo de paredes de contenção.

Mensor *et al.* (1998) realizaram uma revisão da literatura sobre redução de cargas em implantes e usaram um instrumento denominado *Perioteste* para avaliar as propriedades viscoelásticas do sistema amortecedor de implantes. Uma réplica resinosa da mandíbula foi ensaiada, sendo a interface entre o implante e a mandíbula estabelecida via utilização de anéis de borracha. Os valores de movimentos finitos foram medidos pelo *Perioteste*. Os anéis de borracha desempenharam atividade de ligamento periodontal, tendo o *Perioteste* indicado a magnitude da influência da interface.

Choi *et al.* (1999), considerando a crescente necessidade de uso de implantes dentários e da necessidade de interfaces estáveis entre osso e implante, a fim de substituir o PDL, estabeleceram estudo para a concepção de uma superfície sintética para cobertura do implante. Para a realização da cobertura proposta, uma membrana polímera foi introduzida com o objetivo de prover ao sistema, aquelas características viscoelásticas do PDL.

Doblaré, García & Gracia (2000) apresentaram um modelo de remodelagem óssea baseada nos princípios do dano, tendo definido o tensor de remodelagem segundo a consideração dos parâmetros de densidade, porosidade e direção das trabéculas, tendo caracterizado de forma completa a microestrutura e a rigidez óssea. Definiram, ainda, os elementos da teoria de dano: critérios de reabsorção e crescimento, evolução e regularização viscosa das condições de carga e descarga relativas à direção e módulo e velocidade da remodelagem. Avaliaram condições térmicas iniciais envolvidas no processo de remodelagem e necessidade de enquadramento do processo no princípio de mínima dissipação mecânica. Os estudos foram baseados para uma região do fêmur e os resultados foram muito próximos dos experimentais e mostraram-se mais satisfatórios que os apresentados por outros modelos como o termodinâmico e microestrutural



Cimini *et al.* (2000) procederam a uma revisão crítica das diversas medidas encontradas na literatura com respeito às cargas atuantes em dentes humanos. Os valores encontrados foram comparados àqueles onde a simulação foi efetuada pelo MEF para um incisivo central maxilar, discutindo-se as limitações dos dados disponíveis. Dentre as avaliações, constam ainda, resultados referentes a cargas em mordedura, cargas em mastigação, cargas em parafunção e hipóteses de carregamento (pontos de aplicação de carga e ângulo de incidência).

Brosh, Tibi-Machol & Vardimon (2001) analisaram as propriedades mecânicas de recuperação do ligamento periodontal segundo as propriedades viscoelásticas em pré-molares mandibulares e contíguos. As avaliações foram procedidas segundo a quantidade de pontos de contato e submissão a ciclos de cargas, tendo sido utilizado um aparelho denominado TDCP, capaz de medir a força necessária para inserir uma faixa de metal entre dois dentes adjacentes.

Roa *et al.* (2001) propuseram uma alternativa para geração numérica de malhas com os mesmos parâmetros estatísticos da teoria de Voronoi & Delaunay, em substituição às malhas digitais utilizadas para análise das trabéculas ósseas. Após a simulação de exemplos 2-D isotrópicos e anisotrópicos, os resultados dos parâmetros elásticos foram comparados com os obtidos de geometrias de ossos reais, inclusive avaliando as não-linearidades envolvidas em picos de tensão.

Ng-Thow-Hing, Agur & McKee (2001) utilizaram um modelo sólido B-spline para produzir a representação de um músculo que capturasse tanto a forma quanto suas propriedades físicas. O modelo apresentado teve custo computacional menor que os gerados via MEF e permitiu uma rápida representação da contração muscular. A formulação Lagrangeana para equações de movimento permitiu modelar o B-spline tanto para forças de deformação global quanto propriedades materiais localmente diferentes.

Boyd *et al.* (2001) realizaram estudo para investigar mecanismos de falha na microestrutura óssea devido a condição cíclica de cargas impostas nas atividades diárias. Para a avaliação foi utilizada uma representação 3-D do osso trabecular, derivado das imagens de tomografias computadorizadas. Foram investigadas medidas dinâmicas de início de falha, propagação e acúmulo de dano. Um aparelho específico para medição de cargas no osso trabecular foi especialmente desenvolvido e um método computacional foi aplicado para quantificar deformações individuais nas trabéculas. Dentre as principais avaliações registrou-se que para 1%

das deformações globais, as deformações locais entre os nós foram 8 vezes maiores que a deformação global compressiva, enquanto a deformação por tração foi de até 6 vezes maior magnitude.

Crolet (2001) analisou o fenômeno de piezo-elasticidade na escala de fibras colágenas. Apresentou os dois principais resultados teóricos: osso cortical, em escala macroscópica como um meio contínuo e a possibilidade de transformação de informações macroscópicas de tensões em potenciais elétricos na escala microscópica.

Hazenberg *et al.* (2001) realizaram uma simulação computacional para estimar o fator  $K$  de intensidade de tensão no incremento de uma fissura no osso cortical. Dados experimentais sugeriam que as fissuras prolongassem até o contato com o cimento até a periferia de um *osteon*, após esse ponto, o crescimento na direção transversal tornava-se maior que a longitudinal, forçando a mudança de direção da fissura. Os resultados encontrados por Hazenberg mostraram que enquanto a fissura crescia, o fator  $K$  do eixo transversal também crescia, onde o crescimento da fissura era inibido pela presença de um *osteon*. No eixo longitudinal, onde a fissura não estava restringida, o fator  $K$  era reduzido durante o crescimento da fissura. Dentre as conclusões, duas possibilidades poderiam estar em ação: a fissura poderia estar sendo auto-contida ou começando um novo ciclo de crescimento na direção transversal. A simulação computadorizada permitiu prever medidas e formatos das fissuras compatíveis com aquelas obtidas experimentalmente.

Krstin *et al.* (2001) investigaram o comportamento material do ligamento periodontal humano *in vitro*. Para tal pesquisa, foram cortados espécimes das mandíbulas de dois indivíduos. Um sistema especial foi construído para testar os espécimes sob cargas uniaxiais e prevenir contra ressecamento do tecido. As propriedades viscoelásticas foram observadas e os resultados apontaram para a dependência do comportamento do tecido em relação a taxa de carregamento e o número de ciclos. Foi possível, ainda, a determinação de uma curva representativa do módulo de Young para o PDL.

Mendes *et al.* (2001) descreveram uma investigação da biocompatibilidade de materiais biodegradáveis baseado em amido na reposição óssea e fixação de implantes. Para o estudo, um polímero e um compósito, reforçados por partículas de hidroxiapatita foram desenvolvidos *in vivo* e *in vitro*. O procedimento *in vitro* baseou-

se em método de cultura celular, enquanto o *in vivo* foi desenvolvido em implantes intramuscular e intracortical em cabras, usando microscopia eletrônica. A análise de imagens computadorizadas permitiu avaliar o contato e a remodelagem após 6 e 12 semanas do implante. Em ambos os modelos, os materiais baseados não induziram reações adversas e tendo se mostrado apropriado para o uso na fixação, visto que proporciona uma compatibilidade de propriedades mecânicas entre as peças.

Hollister, Maddox & Taboas (2002) utilizaram a teoria de homogeneização para avaliar estruturas efetivamente elásticas e propriedades de permeabilidade, tendo apresentado uma imagem baseada em otimização topológica para o desenho de microestrutura do tecido ósseo.

Sant'ana *et al.* (2002) realizaram estudo com o intuito de estabelecer e caracterizar uma linhagem contínua de células derivadas de ligamento periodontal humano. Após a obtenção de células removidas por raspagem do terço médio das raízes de 3<sup>os</sup> molares, foi procedida à caracterização por meio de microscopia de luz, padrão de crescimento, testes imunohistoquímicos, histoquímicos e enzimáticos. A presença de nódulos mineralizados, tipo de reação a anticorpos e aspecto fusiforme ou estrelado (compatível com os fibroblastos), em conjunto, indicaram que as células cultivadas eram derivadas do ligamento periodontal e poderiam ser utilizadas em estudos *in vitro*.

Figueiredo & Parra (2002) procederam a uma re-leitura dos aspectos normais do ligamento periodontal e do osso alveolar, tecidos componentes do periodonto de fixação. Conceitos como definição, desenvolvimento, funções e componentes (células, fibras, matriz, vasos e inervação) do ligamento periodontal foram revisados além da re-avaliação da estrutura do osso alveolar.

Soncini *et al.* (2002) investigaram experimentalmente a evolução das propriedades mecânicas no osso adjacente ao implante dentário. O procedimento foi baseado em modelos animais e testes mecânicos. Análises microrradiográficas do osso adjacente foram realizadas com o intuito de estabelecer uma interpretação das propriedades ósseas baseadas na morfologia do osso e distinção entre ossos recém-formados e ossos pré-existentes. Os resultados demonstraram que as propriedades evoluíram à medida que o tempo de cicatrização variou de 24 para 45 dias, tendo havido mudanças no espectro de cargas registradas em testes mecânicos, nos casos de defeitos coronais.

Alencar (2003) pesquisou a elaboração de técnicas e processos numéricos para simulação e verificação do comportamento de componentes estruturais usando simulação por elementos finitos, parte integrante de um projeto para desenvolvimento de metodologias avançadas para modernização de turbinas hidráulicas. Especificamente o trabalho foi concentrado na implementação de uma rotina para o cálculo e saídas de resultados das tensões equivalentes, consistindo, também, na simulação numérica de um problema estrutural viscoelástico tridimensional. O processo de pesquisa envolveu a utilização de um programa de MEF para avaliação do método dos gradientes conjugados, como técnica iterativa para a solução de problemas de larga escala e os resultados obtidos foram comparados com outros resultados numéricos e experimentais. A revisão do conceito do modelo de Maxwell e do cálculo de tensões equivalentes, estão entre os destaques do presente trabalho.

Staszyk & Gasse (2004) avaliaram a distribuição e o arranjo das fibras oxitalânicas no periodonto de cavalos. Dois grupos de fibras foram mostrados histologicamente: fibras oxitalânicas relacionadas a vasos sanguíneos e fibras independentes. Os níveis subgingival e terço médio apresentaram arranjos ocluso-apicais alinhados à coroa. As fibras apresentaram desvio de curso, para penetração no cimento, acompanhando paralelamente os feixes de fibras colágenas. As interpretações sugeriram que as fibras oxitalânicas promovem a estabilidade da parede de vasos sanguíneos durante a atividade mastigatória. O nível apical representa a região responsável pela geração de fibras oxitalânicas, pré-requisito para a facilitação da regeneração e reorganização periodontal durante o crescimento e erupção dentários.

## **Capítulo 3**

### **Fundamentação teórica**

Este capítulo contempla uma revisão dos tópicos abordados no presente trabalho e nos artigos que o fundamentaram: ligamento periodontal e estrutura dentária; modelagem matemática e equações diferenciais; noções teóricas da elasticidade e estrutura da matéria; teoria do contato e teoria de molas. Seu objetivo é criar um campo de conhecimento em torno do assunto foco do trabalho, amparando a leitura dos artigos de referência e estabelecendo condições para a percepção das complexas relações a que o sistema está sujeito.

#### **3.1 Ligamento periodontal**

O ligamento periodontal é o tecido conjuntivo frouxo, ricamente vascularizado e celular, que circunda as raízes dos dentes e une o cemento radicular ao osso alveolar propriamente dito. Em direção coronária, o ligamento periodontal é contínuo com a lâmina própria da gengiva pelos feixes de fibras colágenas que conectam a crista do osso alveolar com a raiz do dente (LINDHE, 1992).

Compreender a função desempenhada pelo ligamento periodontal implica em reconhecer as diversas componentes da estrutura dentária (FIGURA 3.1). A

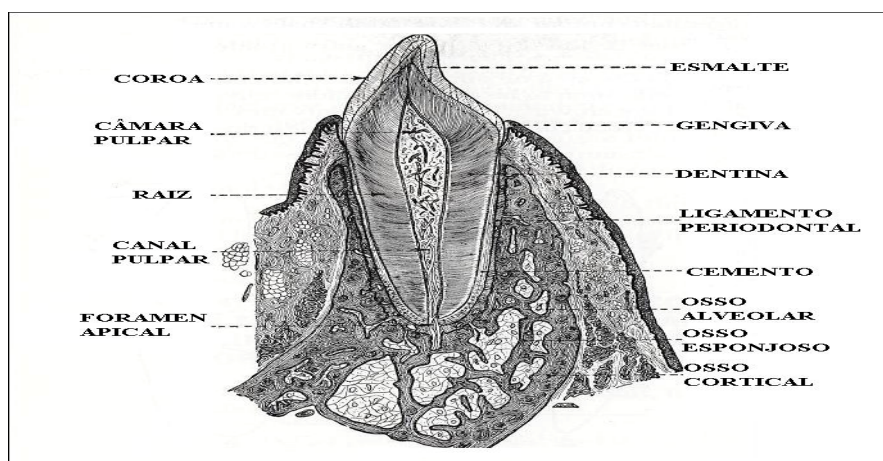
visualização do ligamento periodontal, sua localização e suas proporções frente aos tecidos adjacentes que compõem a estrutura do dente e do aparelho de inserção, ajudam na percepção do papel desempenhado por cada uma das componentes, como integrantes do sistema estomatognático como um todo.

FIGURA 3.1: RADIOGRAFIA EXPANDIDA E IDENTIFICAÇÕES TECIDUAIS



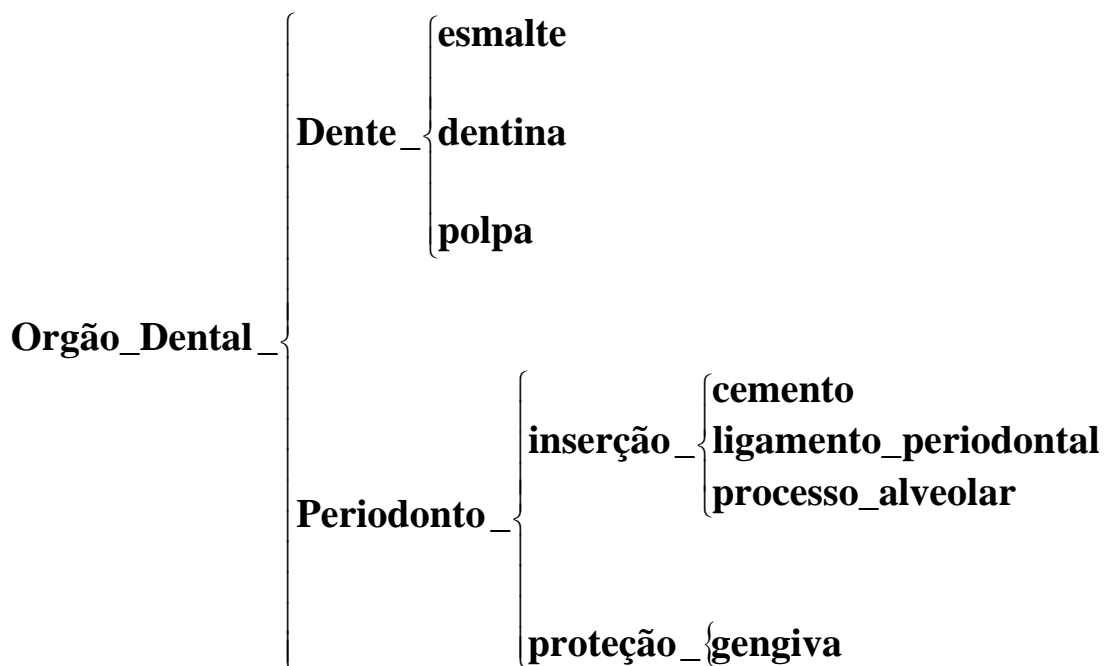
Visando a compreensão da estrutura dentária, diversas definições são estabelecidas por morfologistas (órgãos de tecidos calcificados), anatomistas (descrição junto aos ossos da cabeça), histologistas (órgão composto de dentina, polpa e tecidos acessórios), embriologistas (órgão de produção de aperfeiçoamento), zoologistas e filósofos naturais (órgãos de combate, ataque ou defesa, conservação e perpetuação da espécie). Usualmente, entretanto, a estrutura é observada conforme explicitado na figura 3.2.

FIGURA 3.2: REPRESENTAÇÃO DIAGRAMÁTICA DOS TECIDOS DENTAIS



Adaptado de Wheeler (1974).

Outra classificação segue o esquema dado em Della Serra & Ferreira (1981):



### 3.1.1 Dentes

Os dentes detêm funções tácteis, mastigatórias, fonatórias, estéticas, de transporte e defesa.

Independentemente de qual função esteja sendo exercida prioritariamente, em todas está presente o concurso de forças ou cargas oclusais que vão sensibilizar o organismo e dosar o grau de pressão necessário à execução funcional proposta.

A estrutura dentária conta com o esmalte, de origem ectodérmica, de maior dureza e a mais densamente mineralizada das estruturas do corpo humano. Em sua composição tem-se cerca de 96 a 98% de sais inorgânicos, sendo os restantes 2 a 4% representados por matéria orgânica e água. Não possui capacidade regenerativa, sua espessura máxima (2 a 3 mm) é atingida ao nível da borda incisal dos dentes incisivos e no ápice das cúspides dos caninos, prémolares e molares. A partir desse ponto, a camada de esmalte se adelgaça à medida que se aproxima da linha cervical.

A dentina, por sua vez, é um tecido conjuntivo calcificado de origem mesenquimal que possui milhares de canalículos por milímetro quadrado. É

composta por 65 a 75% de substâncias minerais, 25% substâncias orgânicas e 10% de água. Possui alta resistência e alguma elasticidade.

A polpa, também de origem mesenquimal, é constituída por um tecido conjuntivo frouxo que preenche a cavidade pulpar do dente. Ricamente innervada e vascularizada, a polpa apresenta-se com todos os elementos do tecido conjuntivo (DELLA SERRA & FERREIRA, 1981).

### **3.1.2 Aparelho de Inserção**

O periodonto, compreendendo a gengiva, o ligamento periodontal, o cimento radicular e o processo alveolar, tem por função principal inserir e ligar o dente ao tecido ósseo dos maxilares e manter a integridade da superfície da mucosa mastigatória da cavidade oral, separando o ambiente externo do interno. Suporta e transforma as forças geradas pela mastigação, fonação e deglutição, além de ajustar as alterações estruturais associadas ao uso e envelhecimento por meio das remodelações e regenerações contínuas e promover a defesa contra influências ambientais externas nocivas presentes na cavidade bucal (LASCALA & MOUSSALLI, 1995).

#### **3.1.2.1 Cimento, gengiva e processo alveolar**

A gengiva é a parte da mucosa mastigatória que cobre o processo alveolar e circunda a porção cervical dos dentes. Subdivide-se em gengiva livre, compreendendo as partes vestibular, lingual e papilas interdentárias, e gengiva inserida, de textura firme, firmemente inserida no osso alveolar subjacente e cimento por meio de fibras do tecido conjuntivo e, portanto, comparativamente imóvel em relação aos demais tecidos.

O tecido conjuntivo é a componente tecidual predominante da gengiva e ligamento periodontal. Seus principais constituintes são fibras colágenas, 60%, fibroblastos, 5%, vasos, nervos e matriz, 35%.



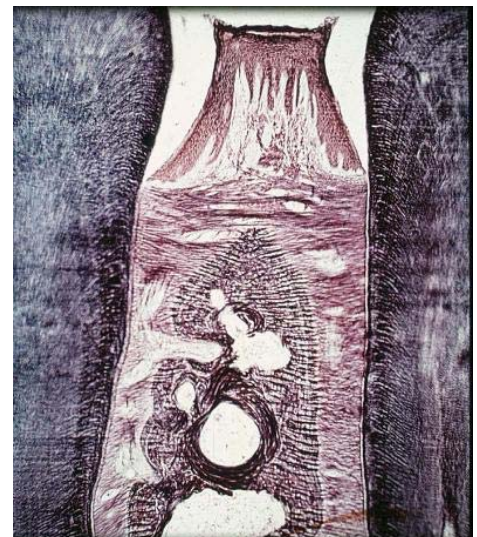
As fibras gengivais, figura 3.3, são usualmente divididas segundo a inserção e trajetória, nos seguintes feixes orientados:

- **Fibras circulares:** dispostas na gengiva livre e circundam o dente à maneira de um anel.
- **Fibras dentogengivais:** embutidas no cemento da porção supra-alveolar da raiz, de onde se projetam a partir do cemento, em forma de leque, em direção ao tecido gengival livre das superfícies facial, lingual e interproximal.
- **Fibras dentoperiosteais:** inseridas na mesma porção do cemento que as fibras dentogengivais, fazendo, porém, trajetória em sentido apical sobre a crista óssea vestibular e lingual, para terminarem no tecido da gengiva inserida.
- **Fibras transeptais:** estendem-se entre o cemento supra-alveolar de dentes vizinhos. As fibras transeptais seguem um trajeto retilíneo sobre o septo interdentário e estão inseridas no cemento de dentes vizinhos. Algumas vezes, essas fibras são classificadas juntamente com as principais fibras do ligamento periodontal (CARRANZA, 1992).

FIGURA 3.3: FEIXES ORIENTADOS DE FIBRAS GENGIVAIS. (A) CORTE ESQUEMÁTICO: 1 GENGIVA INSERIDA, 2 FIBRAS DENTOGENGIVAIS, 3 FIBRAS DENTOPERIOSTEAIS, 4 FIBRAS CIRCULARES E 5.FIBRAS TRANSEPTAIS; EM (B) MICROGRAFIA RESSALTANDO AS FIBRAS TRANSEPTAIS.



(a)



(b)

A matriz é o meio no qual as células do tecido conjuntivo se acham embutidas e é essencial para a manutenção da função normal do tecido conjuntivo. Suas principais componentes são macromoléculas protéico-polissacarídeas. Entre suas atividades está a regulação do fluxo de fluidos no tecido. Devido à sua estrutura e hidratação, as macromoléculas exercem resistência à deformação (FIGUEIREDO & PARRA, 2002).

O cemento é um tecido mesenquimal calcificado especializado que cobre as superfícies dentárias radiculares e, em aproximadamente 65% das vezes (CARRANZA, 1992), pequenas porções das coroas dos dentes. Possui características comuns às do tecido ósseo, entretanto, não contém vasos sanguíneos e linfáticos, não possui inervação, não sofre remodelação e reabsorção fisiológicas, porém caracteriza-se pela deposição contínua ao longo da vida.

Existem dois tipos principais de cemento radicular:

- **acelular** ou **primário**: recobre os dois terços cervicais da raiz e é composto em sua maioria por fibras de Sharpey<sup>1</sup>. Tais fibras têm papel fundamental no suporte do dente, são completamente calcificadas com cristais minerais orientados paralelamente às fibrilas nas áreas de inserção entre dentina e osso, exceto numa área de 10 a 50 micrômetros de largura, próxima da junção cemento-dentina;
- **celular** ou **secundário**: formado após o limite do plano oclusal e é menos calcificado que o cemento acelular.

Entre as funções do cemento radicular destacam-se a inserção das fibras do ligamento periodontal à raiz e a contribuição para o processo de reparo após dano à superfície radicular.

O cemento é produzido pelos cementoblastos. Alguns cementoblastos ficam incorporados no cementóide que, posteriormente, se calcificam e formam o cemento. Tais células incorporadas são chamadas cementócitos. A presença de cementócitos permite o transporte de nutrientes através do cemento e contribui para a manutenção da vitalidade desse tecido mineralizado (LINDHE, 1992).

O processo alveolar é a parte da maxila e mandíbula que forma e dá suporte aos alvéolos dos dentes. É formado durante a erupção dentária de maneira a

---

<sup>1</sup> William Sharpey (1802-1880) – Fisiologista inglês.

fornecer inserção óssea para o ligamento periodontal em formação; ele desaparece gradualmente quando o dente é perdido (CARRANZA, 1992).

As paredes alveolares são revestidas por osso compacto que, interproximalmente, está em relação com o osso esponjoso. O osso esponjoso contém trabéculas ósseas cuja arquitetura e tamanho são, em parte, determinados geneticamente e, por outro lado, constituem o resultado das forças a que os dentes estão expostos durante o funcionamento.

O osso compacto que em radiografias aparece como lâmina dura, reveste o alvéolo e é perfurado por numerosos canais de Volkmann<sup>2</sup>, segundo os quais vasos e nervos passam do osso alveolar para o ligamento periodontal. A camada óssea na qual estão inseridos os feixes de fibras de Sharpey é chamada de osso fasciculado (osso alveolar propriamente dito) e fica situada na superfície interna da parede óssea do alvéolo. Assim, do ponto de vista funcional, esse osso tem muitas características em comum com a camada de cimento das superfícies radiculares.

### **3.1.2.2 Ligamento periodontal**

Entre o osso compacto e o cimento radicular situa-se o espaço do ligamento periodontal. Esse tem a forma de ampulheta e é mais estreito ao nível do terço médio da raiz. A largura do ligamento periodontal é de cerca de 0,25 mm  $\pm$  50% (LINDHE, 1992), variando em um mesmo ligamento, de sua porção coronal para apical. Sua identificação radiográfica é dificultada, primeiro pela sua composição como tecido mole, segundo em virtude de interpor-se entre duas regiões de maior densidade (cimento e osso alveolar), sendo considerada, apenas, pela linha escura que contorna a raiz, enquanto a imagem do cimento é considerada juntamente com a dentina e o osso alveolar em leve destaque sobre o osso esponjoso (LASCALA & MOUSSALLI, 1995).

A presença do ligamento periodontal torna possível a absorção e distribuição de cargas produzidas no osso alveolar, durante a função, por meio do osso alveolar propriamente dito. Além da transmissão de forças, responde também pela aderência dos dentes ao osso, pela manutenção dos tecidos gengivais em relação adequada

---

<sup>2</sup> Richard von Volkmann (1830-1889) – Cirurgião alemão.

com os dentes e pela proteção aos vasos e nervos, com relação às injúrias causadas por forças mecânicas.

Dado que a primeira função lembrada para o ligamento periodontal é a capacidade de absorção e distribuição de cargas, Carranza (1992) destacou essa capacidade e considerou três teorias para avaliação da resistência ao impacto das forças oclusais:

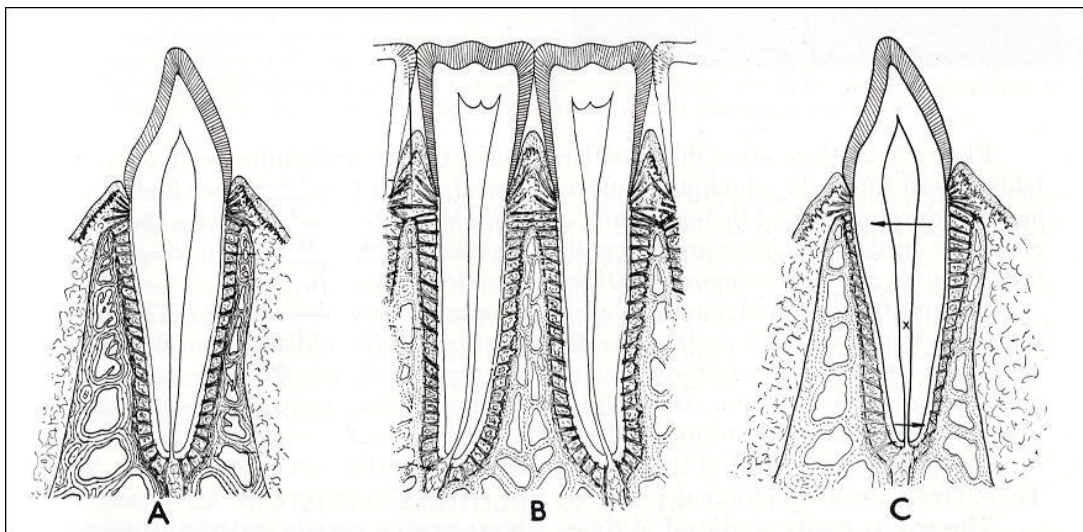
- **Teoria tensional:** as fibras principais do ligamento periodontal se desdobram e se esticam transmitindo forças ao osso alveolar. Quando o osso alveolar atingiu seu limite, a força é transmitida ao osso basal.
- **Teoria do sistema viscoelástico:** os fluidos exercem o controle dos movimentos dentários. As fibras tem um papel secundário. Quando as forças são transmitidas ao dente, o fluido extracelular passa do ligamento periodontal para os espaços medulares do osso, por meio de forames de camada cortical. Após a depleção dos fluidos teciduais, os feixes de fibras absorvem o restante e as fibras retesam-se, levando ao represamento arterial, provocando o abaulamento dos vasos e à passagem de ultrafiltrados sangüíneos para os tecidos, reabastecendo dessa maneira os fluidos teciduais.
- **Teoria tixotrópica:** o ligamento periodontal tem comportamento reológico de um gel tixotrópico. A resposta fisiológica do ligamento periodontal pode ser explicada por alterações na viscosidade do sistema biológico.

Quanto a transmissão de forças oclusais para o osso, destaca-se que forças axiais aplicadas sobre o dente tendem a deslocá-lo para dentro do alvéolo. As fibras oblíquas alteram seu padrão ondulado, sem tensão, distendendo-se no seu maior comprimento e sustentando a maior parte da força axial.

Quando, porém, o dente encontra-se sob forças horizontais e inclinadas, o movimento dentário dá-se em duas fases: a primeira dentro dos limites do ligamento periodontal, e a segunda, produzindo um deslocamento das tábuas ósseas vestibular e lingual. O dente tende a girar ao redor de um eixo que pode mudar à medida que a força é aumentada. A porção apical da raiz se move em direção oposta à porção coronal. Nas áreas de tensão, os feixes de fibras são retesados, e nas áreas de pressão, comprimidas. O dente é deslocado e existe uma distorção óssea correspondente, na direção do movimento da raiz.

A avaliação do comportamento do ligamento periodontal observa, ainda, a orientação dos feixes de fibras colágenas. Tais feixes modificam-se continuamente durante a fase de erupção dentária, atingindo estabilidade quando do contato oclusal e em função apropriada (FIGURA 3.4):

FIGURA 3.4: DESENHO ESQUEMÁTICO DAS FIBRAS FORMADORAS DO LIGAMENTO PERIODONTAL: A, DIREÇÃO VESTÍBULO-LINGUAL; B, MESIO-DISTAL; C, SUPOSIÇÃO DE UM CENTRO DE ROTAÇÃO.



Os feixes individuais seguem um curso ligeiramente ondulado que permite ao dente mover-se em seu alvéolo – mobilidade fisiológica.

As fibras principais embutidas no cemento têm diâmetro menor, porém em quantidade maior que aquelas embutidas no osso alveolar. Tais fibras são mais mineralizadas junto ao cemento que em sua porção de contato com osso alveolar.

As principais células do ligamento periodontal são:

- **Fibroblastos:** Célula predominante do tecido conjuntivo (cerca de 65% da população celular total), acha-se envolvida na produção dos vários tipos de fibras encontradas no tecido conjuntivo e também participa da síntese da matriz do tecido conjuntivo.
- **Osteoblastos:** Células que recobrem a superfície do ligamento periodontal. Podem estar funcionalmente ativas ou em repouso, dependendo da condição funcional do próprio ligamento, constitui um endóstio modificado. Atuam na geração de tecido ósseo.

- **Cementoblastos:** Células que revestem a superfície do cimento voltada para o ligamento. Atuam na geração de cimento.
- **Osteoclastos:** Células atuantes no processo de reabsorção óssea.
- **Fibroclastos:** Células engajadas no processo de reabsorção de colágeno.
- **Cementoclastos:** Células responsáveis pela reabsorção de cimento.
- **Células progenitoras** (substituição), **restos epiteliais de Malassez** (função desconhecida), **mastócitos** (produção de componentes da matriz) e **macrófagos** (funções sintéticas e fagocitárias).

### 3.1.3 Suprimento sanguíneo, linfático e nervoso

O periodonto é irrigado pela artéria dentária que é um ramo da artéria dentaria alveolar superior ou inferior. A artéria dentária emite as artérias intra-septais antes de penetrar no alvéolo. Os ramos terminais da artéria intra-septal, chamados ramos perfurantes, penetram a lâmina dura pelos canais em todos os níveis do alvéolo. No espaço do ligamento periodontal, eles se anastomosam com os vasos sanguíneos originários da porção apical do ligamento e com os demais ramos terminais da artéria intra-septal. Antes de penetrar no canal radicular, a artéria dentária fornece ramos que suprem a porção apical do ligamento periodontal.

Juntamente com o sistema de suprimento sanguíneo encontram-se os sistemas linfático e nervoso, responsáveis pela defesa e sensações tácteis, respectivamente. Os receptores do ligamento periodontal em associação com os proprioceptores dos músculos e tendões desempenham papel essencial na regulação dos movimentos e forças da mastigação.

## 3.2 Modelagem matemática

Em muitas circunstâncias reais, são apresentados problemas que exigem para a sua solução, mais que uma simples reflexão sobre o tema. A filosofia, nesses casos, ajuda no sentido de orientar a idealização do problema segundo uma abordagem científica do mesmo.

A preocupação do cientista está na descoberta das regularidades que existem em determinados fatos. Por isso, a ciência é geral, isto é, as observações feitas para alguns fenômenos são generalizadas e expressas pelo enunciado de uma lei (ARANHA & MARTINS, 1986).

A expressão da lei que rege o evento, dar-se-á segundo um modelo matemático. Esse deverá representar, tanto quanto possível, o fenômeno sob estudo. Tal expressão pode ser uma equação (ou um conjunto delas), ou inequações, ou ainda, combinações de ambas. Pode o problema, também, requerer condições acessórias que delimitem o escopo de validade daquelas expressões. Via de regra, são utilizadas equações diferenciais para formular matematicamente o problema que se pretende expressar.

Boyce & DiPrima (1998) explicaram que a razão principal para resolver muitas equações matemáticas é procurar aprender algo a respeito do processo físico que a equação se propõe a representar. Os conhecimentos necessários para a resolução de problemas considerados complexos e realistas, passam muitas vezes pela simplificação dos problemas e pela adoção dessas simplificações como modelos. As contribuições das soluções dos modelos simples são agrupadas a fim de remontar-se a solução complexa esperada. Quando da busca da solução das equações propostas, algumas podem possuir solução analítica, enquanto outras, são viáveis por ferramentas numéricas.

A verificação da qualidade do modelo assumido está em relação direta com os resultados obtidos. Se o comportamento físico é presumível, então é possível reconhecer o grau de identidade da resposta adquirida com o modelo.

Estando o modelo devidamente identificado com o evento, pode-se, nas circunstâncias onde estiverem identificadas as ocorrências de similaridade, prescindir do experimento físico e tratá-lo diretamente por meio do modelo matemático.

### 3.2.1 Equações diferenciais

A formulação matemática de problemas em engenharia e ciência, usualmente, serve-se de equações que precisam expressar não só grandezas específicas, como também a taxa de variação dessas grandezas, utilizando, portanto, derivadas de uma ou mais funções desconhecidas. Tais equações são chamadas de equações diferenciais.

As equações diferenciais são classificadas segundo determinados critérios de identificação. Dentre esses critérios, ao menos dois interessam em um primeiro contato com o problema: classificar a equação como linear ou não-linear e ordinária ou parcial.

Uma equação diferencial é dita linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3.1)$$

Onde,

- I. A variável dependente  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau, nem há produtos entre  $y$  e quaisquer de suas derivadas, garantindo a existência de apenas uma imagem para a variável independente, em acordo com a teoria de funções.
- II. As funções  $a_j(x) (j=0,1,2,\dots,n)$  e  $g(x)$  supõe-se conhecidas, contínuas em um dado intervalo e dependem apenas da variável independente  $x$ .

Segundo Zill & Cullen (2003), se a equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Ao contrário, uma equação que envolva derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

A classificação segundo os critérios de equação linear ou não-linear, EDO ou EDP, podem implicar em modelos simples ou complexos de busca de solução. Se a equação diferencial for linear, há uma fórmula geral para a solução e, com base nessa fórmula, as determinações de existência e unicidade de solução são



respondidas com relativa facilidade. Além disso, há uma solução geral (com uma constante arbitrária), que inclui todas as soluções e os pontos de descontinuidade possíveis da solução podem ser identificados pela simples localização dos pontos de descontinuidade dos coeficientes. No entanto, no caso de equações não-lineares, não há uma fórmula geral, tornando mais difícil estabelecer propriedades gerais das soluções (BOYCE & DIPRIMA, 1998).

Apesar da variedade de equações que regem os fenômenos físicos, bem como, da quantidade de casos particulares que se pretenda representar, é possível identificar três grandes classes de equações: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Sabonnadière & Coulomb (1993) explicam que as equações elípticas representam problemas de potencial que aparecem nos estudos em regime permanente na eletricidade (eletrostática ou magnetostática), mecânica (deformação de um sólido, escoamento Laplaciano<sup>3</sup> de um fluido) e térmica (distribuição de temperaturas) e são dadas por

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

Em geral, tais equações são características de fenômenos de regime permanente, fenômenos do tipo estático (sem variação temporal) ou variável no tempo segundo função conhecida (senoidal, por exemplo) e as condições de contorno que lhe são normalmente associadas são do tipo:

- Dirichlet<sup>4</sup>  $\phi(s) = \phi_0 = f_0(s) \quad (3.3)$

- Neumann<sup>5</sup>  $\frac{\partial \phi}{\partial n}(s) = f_0(s) \quad (3.4)$

- Mista  $\phi(s) + \frac{\partial \phi}{\partial n}(s) = f_0(s) \quad (3.5)$

As equações parabólicas relacionam-se com problemas de condução de calor e difusão tais como: a difusão da temperatura em um corpo incompressível e penetração de correntes induzidas em um corpo condutor de eletricidade.

<sup>3</sup> Pierre Simon Laplace (1749-1827) – Matemático francês.

<sup>4</sup> Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) – Matemático alemão.

<sup>5</sup> János Von Neumann (ou John Louis Von Neumann) (1903-1957) – Matemático húngaro.

$$k \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = 0, \quad k > 0 \quad (3.6)$$

Conhecida como equação unidimensional do calor, com  $k$  representando uma constante de difusividade térmica e com as seguintes condições de contorno associadas:

- Dirichlet, Neumann ou mista sobre a fronteira espacial do domínio.
- Uma condição inicial  $t = 0$  em todo o domínio.

As equações hiperbólicas caracterizam o fenômeno de propagação das ondas, sejam elas ondas vibratórias do tipo mecânicas ou ondas eletromagnéticas.

$$a^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.7)$$

Tal equação é denominada equação unidimensional da onda, com  $a$  representando uma relação entre tensão e massa do corpo unidimensional.

Os problemas parabólicos e hiperbólicos são associados a estudos de regime transitório (dinâmicos) e sua resolução permite avaliar a evolução de fenômenos físicos no decorrer do tempo.

Independentemente do modelo de equação diferencial assumido, os domínios podem ser formados de vários sub-domínios, onde os coeficientes da equação podem diferir segundo as propriedades físicas dos materiais envolvidos. Nas fronteiras dos sub-domínios, as condições de transferência de um meio a outro, devem obedecer às condições relativas às diversas funções envolvidas e suas derivadas.

Deve-se, entretanto, ter em vista que a simples associação de uma equação com um conjunto de condições de contorno não conduzem necessariamente a um problema matemático que simule um fenômeno físico.

A fim de assegurar maior caracterização do problema, busca-se explicitá-lo segundo o conceito de problema bem definido, ou seja, o problema possui solução, sua solução é única e a solução varia de maneira contínua em função dos dados. Útil para a resposta de tais questionamentos é a observação do teorema da existência e unicidade de Picard<sup>6</sup>, demonstrado em Guidorizzi (1988) e Boyce & DiPrima (1998).

---

<sup>6</sup> Charles Émile Picard (1856-1941) – Matemático francês.

Alguns problemas, relativamente simples, são modeláveis por intermédio de uma única equação diferencial. Entretanto, o caso mais geral, recai na utilização de um conjunto de equações acopladas, que definam diversos aspectos do problema, e cuja solução alcançada para o conjunto seja, também, solução para cada uma das equações, individualmente.

A necessidade de resolver sistemas de equações lineares ou não-lineares aparece em grande quantidade de problemas científicos. Em geral, a solução de equações diferenciais por meio de métodos de discretização, como elementos finitos, por exemplo, apontam para esse tipo de solução de sistemas.

### **3.2.2 Métodos de solução de sistemas**

No trato com sistemas de equações diferenciais, busca-se resolver, por métodos numéricos, aquelas circunstâncias onde o emprego de método analítico se mostre dificultoso, ineficiente ou inexistente.

Usualmente, os métodos são agrupados em métodos diretos e métodos iterativos e dependem, para a sua aplicação, do caso sob análise. Os métodos diretos são aqueles que conduzem à solução exata após um número finito de passos, a menos de erros oriundos de arredondamento introduzidos pelas máquinas, erros de modelagem, erros de truncamento, da teoria, etc. Os métodos iterativos, por sua vez, baseiam-se na construção de seqüências de aproximações, onde, a cada passo, os valores calculados anteriormente são usados para melhorar a aproximação (CUNHA, 2000).

Os métodos iterativos são convenientes para sistema grandes e esparsos que aparecem, freqüentemente, em problemas discretizados, desde que obedeçam algumas condições (que, por sua vez, dependem do método escolhido) para garantir a convergência da seqüência de aproximações.

O presente trabalho demandou a utilização de formulações que tratassem: Informações relativas a tecidos extremamente finos, que se entrelaçam e anastomosam ao longo do percurso, transferindo-se de um conjunto de propriedades para outros, absorvendo e distribuindo influências com relação aos tecidos vizinhos; presença de fluídos tissulares e suas propriedades viscosas; e,

utilização de elementos de mola e contato. Todas as considerações podendo incorrer em possíveis não-linearidades<sup>7</sup>.

Dada a ampla utilização na literatura consultada, a simplicidade de trato e não ter sido do escopo desta pesquisa avaliar o impacto do método de solução dos sistemas de equações não-lineares, as não-linearidades do presente trabalho foram tratadas segundo o método de Newton-Raphson, em um algoritmo iterativo. Ou seja, antes de cada solução, o método avalia a diferença entre as tensões nos elementos e as cargas aplicadas. O programa, então, resolve uma solução linear, usando aquelas tensões e avaliando a convergência. Se o critério de convergência não estiver satisfeito, as cargas e as rigidezes dos materiais são atualizadas e uma nova solução obtida, em um procedimento iterativo contínuo até a convergência do problema.

### 3.2.2.1 Método de Newton-Raphson

Newton<sup>8</sup> publicou seu método para encontrar raízes de equações não-lineares em 1687. Esse método também é conhecido como Newton-Raphson, devido à sistematização apresentada por Raphson<sup>9</sup> em 1690.

O método de Newton combina duas idéias básicas comuns nas aproximações Numéricas:

- I. **Linearização:** substituição (em certa vizinhança) de um problema complexo, por sua aproximação linear. Tal aproximação pode ser obtida tomando-se os primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor<sup>10</sup> da função em questão.

---

<sup>7</sup> Não-linearidades são geradas por variadas causas, as quais podem ser agrupadas nas seguintes categorias principais:

- Mudança de *status* – o comportamento muda em relação ao nível de carga imposto ou em virtude de causas externas. Por exemplo, o contato;
- Não-linearidades geométricas – Mudanças na configuração geométrica podem causar respostas não-lineares. Por exemplo: estruturas sob grandes deformações;
- Não-linearidade de materiais – fatores capazes de influir na relação tensão-deformação levando-o a não-linearidade. Por exemplo: histórico de carga, condições ambientais tempo de aplicação de carga.

<sup>8</sup> Isaac Newton (1642-1727) - Físico inglês.

<sup>9</sup> Joseph Raphson (1648-1715) – Matemático inglês.

<sup>10</sup> Brook Taylor (1683-1731) – Matemático inglês.

II. **Iteração:** repetição sistemática de um procedimento até obter-se a aproximação desejada. Em geral, o passo presente considera, em sua atualização, informações do passo anterior.

Solucionar uma equação em  $f(x)$  não-linear é resolver o problema de procurar valores de  $x^*$ , tais que:

$$f(x^*) = 0 \quad (3.8)$$

No método de Newton, se  $x^0$  é uma aproximação inicial da raiz (FIGURA 3.5), a linearização consiste na substituição da curva  $y = f(x)$  por sua reta tangente traçada no ponto  $(x^0, f(x^0))$ . No ponto de intersecção da reta tangente com o eixo dos  $x$ , obtém-se uma nova aproximação para a raiz, caracterizada pelo ponto  $x^1$ . O processo iterativo é obtido pela repetição desse procedimento. O ponto  $x^2$  é calculado a partir da reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto traçado em  $(x^1, f(x^1))$ .

A expressão analítica que permite o cálculo de  $x^1, x^2, \dots$  é obtida segundo a observação dos conceitos de derivada de uma função em um ponto e tangente de um ângulo  $\theta$ . De

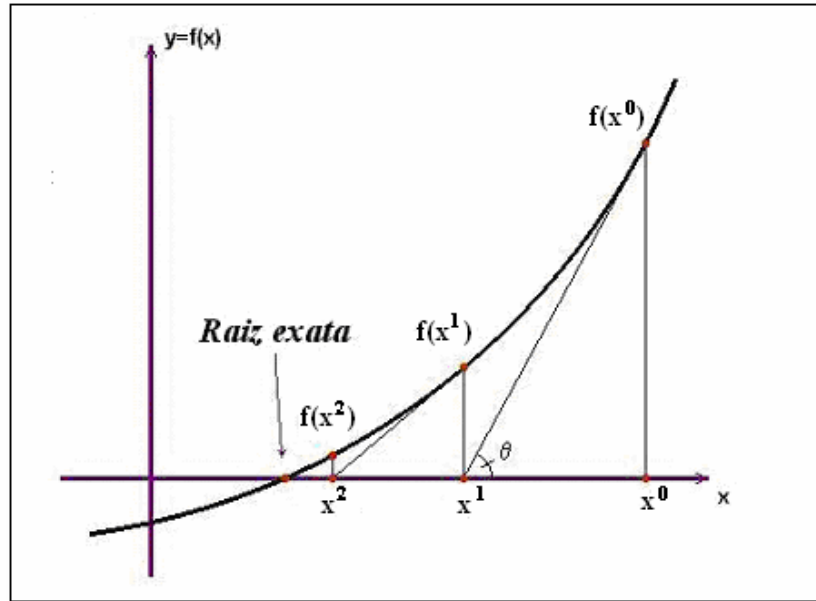
$$\tan \theta = \frac{f(x^0)}{x^0 - x^1} = f'(x^0) \quad (3.9)$$

vem,

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \quad (3.10)$$

E, generalizado:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

FIGURA 3.5: RETAS TANGENTES EM  $(x^i, f(x^i))$ .

Se ao invés de uma função  $y = f(x)$ , for dado um conjunto de equações não-lineares acopladas entre si, onde as funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , são, cada uma delas, funções das  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o objetivo será encontrar os valores de  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , tais que

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Simplificando, toma-se a seguinte notação vetorial:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T \quad (3.15)$$

Assim, o sistema (3.12) será representado por uma única equação vetorial,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Utilizando a série de Taylor, ajustada às circunstâncias vetoriais, tem-se:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \mathbf{E} \quad (3.17)$$

ou seja,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  = aproximação linear + erro, e  $\mathbf{x}^k$  é o vetor aproximação na  $k$ -ésima iteração e  $\mathbf{E}$ , um vetor que representa o erro da aproximação linear, tal que

$$\|\mathbf{E}\| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|^2 \text{ para alguma constante } C, \text{ quando } \mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}.$$

Como  $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$  é a derivada de uma função vetorial, sua representação é uma matriz que contém todas as derivadas parciais de todas as componentes da função  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Tal matriz é dita matriz Jacobiana<sup>11</sup> de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = [J_{ij}] = \left[ \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]. \quad (3.18)$$

Para estabelecer o método iterativo, a aproximação na iteração  $k+1$  será definida pelo vetor que anula a parte linear da equação (3.17), isto é, o vetor  $\mathbf{x}^{k+1}$  é tal que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = 0 \quad (3.19)$$

Explicitando  $\mathbf{x}^{k+1}$  e substituindo a expressão de  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$  por  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ , tem-se:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^k) \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{J}^{-1}$  é a inversa da matriz Jacobiana.

O critério de parada no cálculo iterativo acima pode ser dado segundo um valor suficientemente próximo de zero ou na ocorrência de falta de progresso nos cálculos, situação verificada quando a diferença entre dois iterados torna-se muito pequena.

### 3.2.3 Estimativa de erro

Em métodos numéricos trabalha-se com aproximações. Fazem-se necessárias, portanto, algumas maneiras de medir ou delimitar os erros, sejam eles introduzidos pelos equipamentos, pela técnica empregada ou mesmo em função da

---

<sup>11</sup> Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) – Matemático alemão.

modelagem, do truncamento do processo de cálculo, da teoria na qual se baseia, de arredondamentos e outros (CUNHA, 2000).

Se consideramos  $c^*$  uma aproximação do valor exato  $c$ , definimos o erro absoluto da aproximação

$$e = |c^* - c| \quad (3.21)$$

o erro relativo da aproximação

$$e_r = \left| \frac{c^* - c}{c} \right| \quad (3.22)$$

e o erro relativo percentual

$$e_{r\%} = \left| \frac{c^* - c}{c} \right| \times 100 \quad (3.23)$$

Sob a ótica do Método dos Elementos Finitos, as soluções  $c^*$  e  $c$  são funções contínuas, por exemplo,  $f^*(x)$  e  $f(x)$ , cuja expressão do erro assume a forma

$$e(x) = f^*(x) - f(x) \quad (3.24)$$

Além das características gerais da solução, também é de interesse saber as regiões onde a solução varia mais rapidamente, ou seja, conhecer o comportamento das funções e de suas derivadas.

É usual medir-se a precisão da aproximação mesmo quando a solução exata não é conhecida. Nesse caso, é possível estimar o erro. Para tal, utiliza-se uma das seguintes normas:

- **Norma da energia:** dependente da forma do problema de valor de contorno considerado. Se a energia total de deformação, por exemplo, é dada para uma caso particular por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (u')^2 + u^2 \right] dx \quad (3.25)$$



então,

$$\|e\|_E = \sqrt{\int_0^1 \left[ \left( e'(x) \right)^2 + (e(x))^2 \right] dx} \quad (3.26)$$

ou seja, a norma da energia é numericamente igual a raiz quadrada de duas vezes a energia de deformação.

- **Norma da raiz média quadrática:** mede a raiz média quadrática de uma função sobre um domínio e é definida por:

$$\|e\|_0 = \sqrt{\int_0^1 (e(x))^2 dx} \quad (3.27)$$

- **Norma do máximo:** mede o máximo valor absoluto de uma função sobre um domínio:

$$\|e\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |e(x)| \quad (3.28)$$

É comum buscar-se estimativas assintóticas dos erros. Supondo um domínio discretizado por uma malha de elementos de comprimento uniforme (parâmetro  $h$  da malha), refina-se a malha, diminuindo  $h$  e aumentando  $n$  (o número de elementos). No limite, e para  $h$  bem pequeno, a norma do erro é estimada por:

$$\|e\| \leq Ch^p \quad (3.29)$$

onde  $C$  é uma constante dos dados do problema e  $p$  é um inteiro que depende das funções básicas escolhidas na aproximação do elemento finito. O expoente  $p$  é a taxa de convergência do método em relação à norma adotada. Se  $p$  é positivo, o erro  $\|e\|$  aproxima-se de zero com  $h$  tendendo a zero. Em tais condições diz-se que a aproximação converge para a solução exata com respeito à norma escolhida (BECKER; CAREY & ODEN, 1986).

### **3.3 Propriedades físicas dos materiais**

Para Timoshenko & Gere (1983), um projetista deve estar atento à escolha do conjunto de propriedades físicas dos materiais, bem como às dimensões da estrutura, de maneira que resistam com segurança às várias condições de cargas.

Segundo Skinner (1984), o estudo dos materiais dentários exige, necessariamente, um conhecimento básico da matéria, particularmente dos sólidos, para poder compreender e, com freqüência, prever as propriedades e reações dos materiais. Todas as componentes dentárias são constituídas de átomos. As reações coletivas dos átomos, físicas ou químicas, determinam a eficiência do material.

Craig, Powers & Wataha (2002) destacou que os materiais utilizados para substituir componentes dentários ficam expostos ao ataque do ambiente bucal e submetidos a forças mastigatórias. Além disso, tais materiais são limpos e polidos por meio de vários procedimentos profiláticos.

Com o intuito de ambientar, principalmente, o profissional da área odontológica à terminologia e conceitos usuais aos campos da química, física e engenharia, bem como proporcionar a compreensão com relação aos diversos aspectos envolvidos nos artigos consultados para o presente trabalho, disponibilizou-se a seguinte revisão da teoria atômica, tratando desde a estrutura da matéria até seu comportamento físico perante um dado sistema de forças.

#### **3.3.1 Alterações de estado**

Dentre as questões relevantes, podemos considerar a de como os átomos são mantidos unidos. Por exemplo, quando o vapor de água condensa-se para formar um líquido, é liberada energia na forma de calor, conhecida como calor de vaporização. Pode-se, assim, concluir que o estado gasoso apresenta mais energia que o líquido. Embora as moléculas no estado gasoso exerçam uma certa quantidade de atração mútua, elas podem prontamente difundir-se e, geralmente, necessitam ser confinadas a fim de manter o gás intacto.

Apesar de a difusão também se apresentar no estado líquido, suas atrações mútuas são maiores e mais energia é solicitada para promover tal separação. Se, ao

contrário, houver diminuição de energia do líquido, em virtude do abaixamento de temperatura, por exemplo, poderá ocorrer uma nova transformação de estado, desta vez, para o sólido.

Como é necessária energia para a alteração do estado sólido para o líquido, pode-se concluir que a atração entre os átomos (ou moléculas), no estado sólido, é maior do que no estado líquido e no gasoso. Se isso não fosse verdadeiro, eles poderiam facilmente separar-se; um sólido se deformaria prontamente, gaseificando-se a baixas temperaturas.

A temperatura na qual um líquido entra em ebulição ou solidifica-se depende, ao menos parcialmente, da pressão ambiente. Se um líquido em transformação, está sob uma camada gasosa supersaturada com vapor, a fase gasosa condensa-se ao estado líquido até ser estabelecido um equilíbrio. A força exigida para liberar as moléculas de um líquido relaciona-se com a pressão de vapor do líquido.

### 3.3.2 Ligações interatômicas

Segundo Skinner (1984), as ligações interatômicas podem ser classificadas em ligações primárias, de natureza química, ou secundárias, caracterizadas por forças físicas.

Os primeiros modelos eletrônicos para forças ou ligações, que mantêm os átomos unidos, foram desenvolvidos por Kossel<sup>12</sup> e Lewis<sup>13</sup>, o primeiro concentrado nas substâncias iônicas e o segundo, nas moleculares.

Os elementos tendem a adquirir elétrons até possuir oito no nível mais exterior (regra do octeto). Esse número coincide com os elétrons externos dos gases nobres (estável e bastante inertes), exceto o hélio. Diferentes formas de adquirir elétrons originam as diversas classes de ligação (LEWIS, apud FELTRE, 1985).

- **Ligação iônica** - transferência de elétrons de um átomo para outro. Um elemento tende a ceder elétrons (metais) e outro a receber (não-metais e hidrogênio). Ao perder elétrons, um átomo fica com carga positiva (cátion), o

---

<sup>12</sup> Walter Kossel (1888-1956) – Físico alemão.

<sup>13</sup> Gilbert Newton Lewis (1875-1946) – Químico americano.

outro, recebendo elétrons, fica com carga negativa (ânion). A perda de elétron se dá com pequeno consumo de energia (energia de ionização). Devido a forte atração entre os íons positivos e negativos, os compostos iônicos são sólidos cristalinos duros, mas friáveis. Possuem uma elevada temperatura de fusão e, em estado sólido, não conduzem corrente elétrica. Podem ser solúveis em água ou não. Compostos iônicos com energia reticular (energia do cristal) muito alta não se dissolvem em solução aquosa. Com baixa energia se dissolvem mais facilmente, conduzindo corrente elétrica. Também a conduzem em estado líquido, ou seja, fundidos, por tirar mobilidade das cargas.

- **Ligação Covalente** - Quando dois átomos mais eletronegativos são iguais ou quando se encontram unidos formando um composto ou um elemento, o modelo de ligação iônica não é aplicável. Isso porque os dois átomos tendem a receber elétrons e são praticamente incapazes de cedê-los, ou seja, os átomos adquirem os oito elétrons em seu nível externo por compartilhamento, como indica a regra do octeto. Todos os gases e líquidos são covalentes em temperatura ambiente. Também existem sólidos covalentes, mas suas propriedades são muito irregulares. Nos sólidos duríssimos, como o diamante, as ligações covalentes são em cadeia. Nos sólidos de baixo ponto de fusão, como o açúcar, a união é entre moléculas devido à sua polaridade. Os compostos covalentes polares são solúveis em água e os apolares não. Não conduzem corrente elétrica em estado sólido, nem quando dissolvidos (há exceções, como os ácidos) ou fundidos. Se os átomos unidos forem iguais, os dois atraem os elétrons com a mesma força. A molécula assim formada tem o centro de carga negativa, portanto é apolar. Se os átomos unidos forem diferentes, um atrairá os elétrons compartilhados com maior força, criando-se assim uma polaridade. Quando existe polaridade, a molécula age como um dipolo. O elemento eletronegativo será o pólo negativo e o eletropositivo, o pólo positivo. Os compostos covalentes são formados por extensas cadeias, o que explicaria o estado sólido pelo tamanho e massa das moléculas: é o caso do diamante, do quartzo ou de muitas proteínas. Outras vezes, formam moléculas com um pequeno número de átomos. A atração entre as moléculas dessas substâncias é diferente e há vários tipos de interações

intermoleculares. O tipo de interação é responsável por várias propriedades químicas e físicas: quanto mais forte a interação entre as partículas, maior seu ponto de ebulição por exemplo.

- **Ligação Metálica** - Considera-se que um metal é formado por cristais entrecruzados formados por íons positivos. Os elétrons "banham" esses íons movendo-se livremente por todos os cristais, como um gás num recipiente fechado. Tais elétrons são chamados elétrons de valência e são pouco unidos ao núcleo nos elementos eletropositivos. Esse modelo explica as propriedades mecânicas dos metais: maleabilidade, ductibilidade e condutividade elétrica e térmica.
- **Forças de Van der Waals<sup>14</sup>** - Enquadrada na categoria de ligações secundárias, é tida como uma ligação mais física que química. Essas forças devem-se à polaridade das moléculas. Agem inclusive quando uma das moléculas presentes não é polar. A presença de polaridade deforma a nuvem eletrônica da molécula não-polar até criar uma polaridade. Assim como um pedaço de ferro se transforma em ímã em presença de um campo magnético.
- **Ligação de hidrogênio** - São mais intensas que as forças de Van der Waals. Agem quando um dos pólos da molécula é hidrogênio e o outro, um elemento bastante eletronegativo, como o oxigênio ou o flúor. As forças eletrostáticas de atração são muito intensas, mas não tão fortes quanto uma ligação covalente.

### 3.3.3 Distância interatômica

Independentemente do tipo de estrutura no estado sólido, existem fatores limitantes que impedem átomos ou moléculas de aproximarem-se exageradamente entre si. A distância entre o centro de um átomo e aquele de seu vizinho é limitada, por exemplo, ao diâmetro dos átomos envolvidos.

Os átomos não são partículas discretas. Suas fronteiras e volumes são vagamente estabelecidos pelos campos eletrostáticos dos elétrons.

Concorrentemente estão atuando forças de atração e repulsão geradas por suas cargas eletrônicas. A posição na qual tais forças tornam-se iguais em magnitude, porém opostas em direção, é a posição normal ou de equilíbrio dos átomos.

A força de repulsão dos elétrons é maior que a força de atração semelhante para um mesmo deslocamento. A distância segundo a qual os átomos podem ser movidos, sob compressão, é, assim, muito menor.

### 3.3.4 Energia de ligação

As condições de equilíbrio são mais proximamente relacionadas ao fator energia do que as forças interatômicas. Se uma força  $\vec{f}$  induz trabalho  $W$  sobre uma partícula, a ponto de alterar sua velocidade, então a energia cinética da partícula varia de um valor inicial  $k_i$  para um valor final  $k_f$ , ou seja, a mudança na energia cinética é numericamente igual ao trabalho realizado.

$$W = k_f - k_i \quad (3.30)$$

mas,

$$W = f \times u \times \cos \theta \quad (3.31)$$

onde  $f$  e  $u$  são as componentes dos vetores força  $\vec{f}$  e deslocamento  $\vec{u}$ , e  $\cos \theta$  o ângulo entre os mesmos.

Igualando  $W$  de (3.30) e (3.31) e resolvendo para  $k_f$ , tem-se:

$$k_f = k_i + f \times u \times \cos \theta \quad (3.32)$$

Por outro lado, a estrutura atômica contempla um arranjo com uma infinidade de átomos, todos interagindo eletricamente e, por isso, gerando um campo eletromagnético onde, naturalmente, aparecem as forças de atração e repulsão. As forças repulsivas tendem a frear os deslocamentos impostos pelas forças compressivas. De forma similar, mas não com a mesma intensidade, as forças atrativas tendem a frear os deslocamentos decorrentes das forças de tração.

---

<sup>14</sup> Johannes Diderik Van der Waals (1837-1923) – Matemático e físico holandês.

Como decorrência da observação anterior, a equação (3.32) representará a energia mínima no sentido que o balanceamento das forças atuantes seja nulo, o que ocorre na condição de equilíbrio na distância interatômica normal.

### 3.3.5 Energia térmica

A energia térmica é explicada pela energia cinética dos átomos ou moléculas a dada temperatura. Os átomos de um cristal, por exemplo, a temperaturas superiores ao zero absoluto, estão em constante estado de vibração, cuja amplitude média dependerá da temperatura; quanto maior a temperatura, maior será a amplitude e, por consequência, maior será a energia cinética ou interna.

Dado que a energia mínima é a energia de equilíbrio, se aumentarmos a temperatura, crescerá a amplitude da vibração atômica ou molecular, gerando, também, aumento do espaço interatômico, bem como da energia interna. O efeito é conhecido como expansão térmica.

Se a temperatura continuar a elevar-se, será aumentado o espaço interatômico e, eventualmente, ocorrerá uma mudança de estado.

A relação entre a expansão térmica e a temperatura tende a ser inversamente proporcional a temperatura de fusão e é conhecido por coeficiente de expansão térmica linear  $\alpha$  e pode ser expressa, segundo Timoshenko & Gere (1983), pela seguinte equação:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\Delta t} \quad (3.33)$$

Onde  $\varepsilon$  significa a deformação relativa e  $\Delta t$  a variação na temperatura.

Skinner (1984) salienta, porém, que a condutividade térmica relaciona-se com o espaço interatômico somente na medida em que o calor é conduzido de um átomo ou molécula para o mais próximo ou na medida em que as unidades estruturais básicas adjacentes são afetadas pela energia cinética de seus vizinhos. O número de elétrons livres no material influenciará, entretanto, sua condutividade térmica e elétrica. Craig, Powers & Wataha (2002) reforça que materiais com valores de condutividade térmica altos são bons condutores de calor e frio.

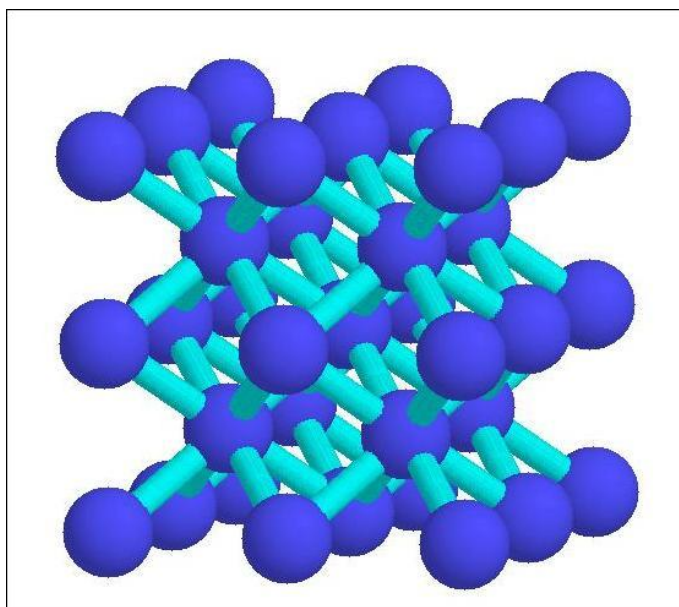
### 3.3.6 Estrutura cristalina

Os materiais, em geral e dependendo de seu volume, podem ser compostos de muitos milhões de átomos. Um questionamento de relevante interesse é saber qual a configuração em que esses átomos estão arranjados em, por exemplo, um sólido. Em 1665, Hooke<sup>15</sup> simulou as formas características dos cristais, amontoando bolas de mosquete em pilhas.

Os átomos, ligados por forças primárias e secundárias, configuram-se de modo a assegurar uma energia interna mínima. Em diversas combinações eles formam um arranjo regularmente espaçado, conhecida como grade espacial ou cristal. Em um cristal, todos os átomos estão localizados de maneira semelhante, relativamente a todos os outros átomos.

Os cristais são sólidos geométricos limitados por faces planas (poliedros) e de composição química definida. As faces planas de um cristal são paralelas aos planos da sua malha elementar (FIGURA 3.6).

FIGURA 3.6: MODELO DE REDE CRISTALINA.



A malha elementar delimita uma porção de espaço dotado de uma certa quantidade de átomos. A malha elementar repetindo-se periodicamente em três direções do espaço define uma rede de três dimensões que será o suporte

---

<sup>15</sup> Robert Hooke (1635-1703) – Físico inglês.



geométrico das estruturas atômicas dos cristais. As propriedades geométricas de um cristal, tais como as arestas, ângulos e planos das faces, estão diretamente ligadas à sua malha elementar, podendo ser descritas a partir de um certo número de operações de simetria. Os elementos de simetria de um cristal são fundamentalmente o plano de simetria, o eixo de simetria e o centro de simetria. A combinação de todos os elementos de simetria origina 32 classes<sup>16</sup> de simetria, pelas quais se repartem todos os cristais. De acordo com certas características comuns ou parecidas, podem-se distribuir as 32 classes por sete grandes grupos, os chamados sistemas cristalinos: cúbico, romboédrico, hexagonal, tetragonal, ortorrômbico, monoclinico e triclínico.

### 3.3.7 Estrutura não cristalina

Naturalmente, existem estruturas que não são classificáveis como cristalinas. Alguns materiais são ditos amorfos, significando que as suas moléculas se distribuem ao acaso.

Mesmo em estruturas amorfas, as substâncias tendem a um arranjo regular. Decorrencia natural da condição de equilíbrio, onde a energia interna é mínima. Porém, os arranjos ordenados dos materiais amorfos são menos regulares que os arranjos dos sólidos cristalinos. Ou seja, tais arranjos são mais ou menos localizados, com um número considerável de unidades desordenadas naquela ordenação. Como tais arranjos são típicos em líquidos, esses sólidos são às vezes chamados de líquidos super-resfriados.

Skinner (1984) explica que tais arranjos estruturais não cristalinos não apresentam energias internas tão baixas quanto as dos arranjos cristalinos, ainda que com mesmos átomos e moléculas. Não apresentam temperatura de fusão definida; é mais próprio deles o amolecimento gradual em face ao aumento de temperatura; e endurecem gradualmente, à medida que resfriam. A temperatura na qual primeiro formam uma massa rígida no esfriamento ou em que perdem dureza ou fragilidade no aquecimento é chamada de temperatura de transição vítrea.

---

<sup>16</sup>[http://domingos.home.sapo.pt/minerais\\_1.html](http://domingos.home.sapo.pt/minerais_1.html)– 15/10/2004.

### 3.3.8 Tensão e deformação

A energia é dependente do espaço interatômico, tendendo a tornar-se maior quando o espaço for menor que o da configuração de equilíbrio. Em contrapartida, aumenta, de início, à medida que o espaço interatômico aumenta, mas após um estado de proporcionalidade volta a aproximar-se de zero.

A posição normal dos átomos pode ser aumentada ou diminuída pela aplicação de uma força mecânica. Na presença de uma força que tenda a afastar dois átomos, tanto a força resultante quanto a energia tenderão ao aumento inicialmente. Em processos reversíveis, desde que a força atuante seja liberada, a energia novamente tornar-se-á mínima e os átomos retornarão a seus espaços de equilíbrio.

Se a força for medida atuando em determinada área, ela será chamada de tensão, e a alteração de dimensão correspondente, denominada deformação. Teoricamente, tensão e deformação existem sempre que a distância interatômica é alterada da posição de equilíbrio (SKINNER, 1984).

Se as tensões excederem a força resultante (por unidade de área), a energia e a força de atração serão reduzidas ao ponto no qual os átomos podem separar-se inteiramente, ocorrendo fraturas ou rompimento.

As tensões podem ocorrer, igualmente, sob compressão, porém a quantidade de deformação, mesmo sob tensões consideráveis, é limitada, devido a repulsão elevada dos campos eletrostáticos negativos. Esse fato é indicado pelo brusco aumento na energia quando a distância interatômica torna-se menor que a da configuração de equilíbrio.

### 3.3.9 Difusão

Os átomos de uma grade espacial estão constantemente em vibração ao redor de um centro. A energia cinética de vibração, média, em todo o cristal, relaciona-se à temperatura. No zero absoluto, a vibração cessa, a energia torna-se zero e o átomo ocupa seu centro de vibração.

Alguns átomos tendem a ter mais energia que outros, decorrência direta de sua amplitude de vibração. É possível que os átomos com maior energia possam ser capazes de deslocar aqueles com níveis de energia menor e, assim, alterar suas localizações na grade espacial. Tal movimento é chamado difusão e a energia requerida para implementá-lo é conhecida como energia de ativação.

Mesmo em um sólido em equilíbrio, os átomos podem mudar de posição; tal difusão é conhecida por autodifusão. Entretanto, a autodifusão não é capaz de gerar alterações dimensionais visíveis ou mensuráveis.

A velocidade de difusão é diretamente proporcional à temperatura e ao tamanho do átomo. Também é altamente dependente da ligação interatômica ou intermolecular e às imperfeições na grade espacial. Vários meios apresentam velocidades de difusão diversas, características do meio em particular. A constante de difusão própria de dado elemento, composto, cristal etc., é denominada coeficiente de difusão e definida como a quantidade de difusão que se dá em uma unidade de área, por unidade de espessura da substância e na unidade de tempo.

Os coeficientes de difusão da maioria dos sólidos cristalinos, à temperatura ambiente, são muito baixos. Ainda assim, a poucas centenas de graus de temperatura maiores, as propriedades do material podem ser radicalmente alteradas pela difusão atômica. A difusão em um material não cristalino pode ocorrer em velocidade mais rápida e, freqüentemente, pode ser evidente com o tempo, à temperatura ambiente ou do corpo humano. O motivo relaciona-se à maior energia interna do material não cristalino. A estrutura desordenada possibilita às moléculas difundirem-se com menor energia de ativação.

### **3.3.10 Adesão e união**

Segundo Skinner (1984), adesão é a força que faz com que duas substâncias se unam quando colocadas em íntimo contato entre si. As moléculas de uma substância aderem (são atraídas) para as moléculas de outra.

Quando moléculas diferentes são atraídas, temos adesão; quando o processo se dá entre moléculas do mesmo tipo a força é denominada coesão.

O material adicionado para produzir adesão é conhecido por adesivo, e o corpo ao qual é aplicado chama-se aderente.

A adaptação firme de duas substâncias pode também ser conseguida por união mecânica ou retenção, utilizando-se parafusos, reentrâncias, penetração de adesivos em irregularidades microscópicas, entre outras possibilidades.

Os adesivos líquidos, fluidos ou semiviscosos se adaptam muito bem a tal procedimento, pois têm fácil penetração nas irregularidades da superfície. Após a solidificação, uma rede de projeções adesivas proporciona os apoios para a adaptação ou retenção mecânica.

### **3.3.11 Energia de superfície**

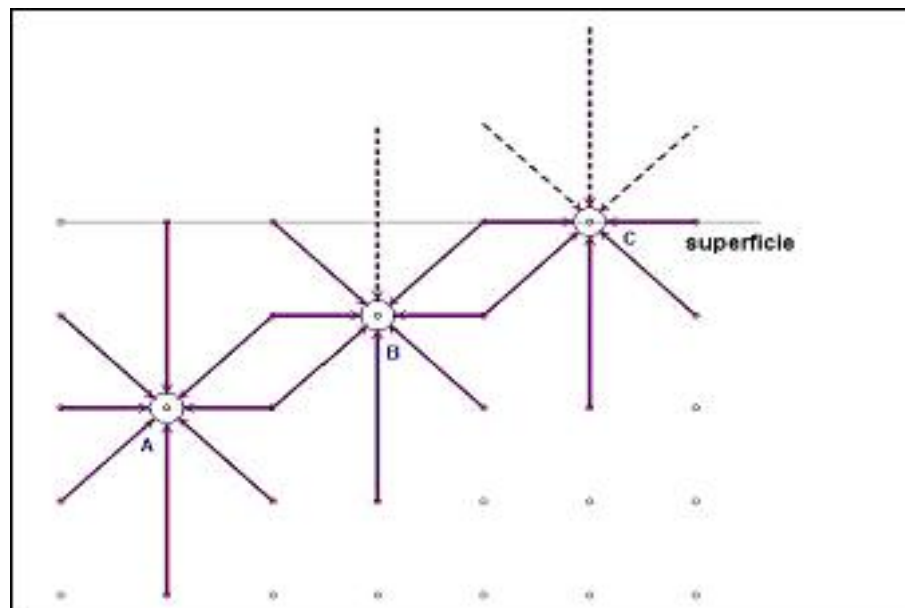
Supondo a adesão entre superfícies, as mesmas deverão ser atraídas entre si em suas interfaces. Tal condição pode existir independentemente das fases (sólido, líquido ou gás) das duas superfícies. Skinner (1984) lembra que como exceção, a adesão entre dois gases não deve ser pretendida posto que não há interface.

A energia na superfície de um sólido é maior que em seu interior. Na parte interna de uma grade espacial, todos os átomos são igualmente atraídos entre si. As distâncias interatômicas são iguais e a energia é mínima. Na superfície da grade, a energia é maior por causa dos átomos mais externos não serem igualmente atraídos em todas as direções (FIGURA 3.7).

As ligações insaturadas geram energias de superfície. A atração mútua entre os próprios átomos da superfície dá origem a um fenômeno conhecido por tensão superficial. As moléculas no ar podem ser atraídas à superfície e adsorvidas pelo material.

Quando a adesão é devida a ligações primárias, uma verdadeira ligação química se processa entre o adesivo e o aderente, e tal fenômeno é denominado sorção química. Entretanto, as forças de Van der Waals precedem, invariavelmente, à sorção química, visto que à medida que a distância entre o adesivo e o aderente diminui, a ligação primária pode tornar-se efetiva. Porém, essa sorção é limitada à camada única do adesivo presente sobre o aderente.

FIGURA 3.7: ILUSTRAÇÃO ESQUEMÁTICA DO DESENVOLVIMENTO DE ENERGIAS DE SUPERFÍCIE.



Adaptado de McGraw-Hill (1964).

### 3.3.12 Umedecimento

Em geral, duas superfícies sólidas resistem à adesão. Independentemente de como a lisura das superfícies possa ser observada, elas parecerão rugosas quando consideradas nas dimensões atômicas ou moleculares. Quando confrontadas, apenas os picos de cada superfície entrarão efetivamente em contato, acarretando uma adesão deficiente.

Um método de superar a dificuldade da observação anterior consiste em usar fluidos que escoarão nessas irregularidades, proporcionando, assim, contato em grande parte da superfície do sólido. Tal técnica é conhecida por umedecimento.

Se o líquido adesivo não umedecer a superfície do aderente, devido à baixa energia de superfície desse, a adesão entre líquido e aderente será desprezível ou inexistente. Caso exista um umedecimento verdadeiro da superfície, não poderão ocorrer falhas de adesão. Em tais casos, a falha, de fato, ocorre no sólido ou no próprio adesivo, mas não na área onde sólido e adesivos estão em contato.

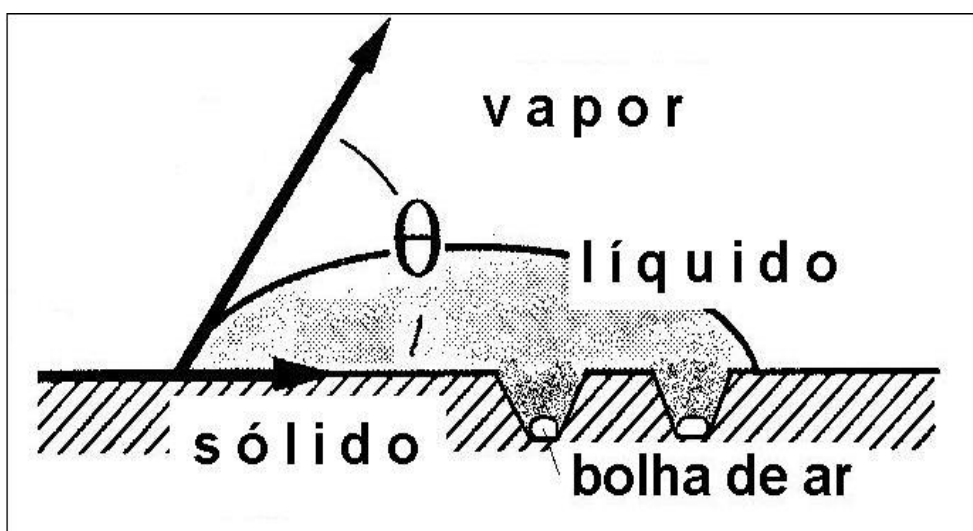
Skinner (1984) observa que as energias de superfície relativamente baixas de líquidos orgânicos e a maioria dos inorgânicos permitem-lhes espalhar-se livremente

sobre sólidos de alta energia de superfície. A formação de uma união adesiva forte exige, assim, bom umedecimento. O líquido adesivo deve, além disso, solidificar-se e ter suficiente deformabilidade para reduzir o desenvolvimento de tensões elásticas na formação da união.

### 3.3.13 Ângulo de contato

A extensão na qual o adesivo irá umedecer a superfície do aderente é determinada, geralmente, medindo o ângulo de contato entre adesivo e aderente, em suas interfaces (FIGURA 3.8). Para uma adesão perfeita, o líquido adesivo deverá assentar-se completamente sobre a superfície aderente, não formando qualquer ângulo. Ou seja, as forças de adesão são mais fortes que as forças de coesão, que mantêm as moléculas do adesivo juntas.

FIGURA. 3.8: BOLHAS DE AR EM IRREGULARIDADES DA SUPERFÍCIE.



Adaptado de Skinner (1984).

Entretanto, na presença de contaminação, a energia da superfície do aderente tende a reduzir-se proporcionando a formação de ângulo no contato.

Concorre, ainda, para a deficiência da adesão, o fato de as superfícies de contato não serem de fato planares. Em verdade, as imperfeições superficiais podem dar origem a bolhas de ar, nas regiões de poros superficiais, quando do espalhamento de líquido adesivo. As bolhas de ar são áreas de descontinuidade na

adesão, enfraquecendo a mesma. Na presença de alterações térmicas e tensões mecânicas na proximidade desses poros, a concentração de tensões desenvolvida pode ser muito maior que a tensão média aplicada. A tensão pode então tornar-se tão grande que se iniciará uma fratura na união adesiva, adjacente ao poro. A fenda pode propagar-se de uma bolsa para outra e a união poderá fraturar-se.

### 3.4. Noções de teoria do contínuo

Na análise atômica, viu-se que a tensão é a força por unidade de área, que atua em milhões de átomos. Do ponto de vista prático, entretanto, o interesse está pautado no comportamento da estrutura, como um todo, às forças aplicadas.

Para o problema do ligamento periodontal, em questão, apesar de reconhecer-se a atuação da força sobre os átomos de cada componente da estrutura dentária, o interesse está pautado no comportamento do conjunto de átomos como agrupamentos denominados por tecidos, ou seja, na maneira como cada um dos tecidos periodontais reage àquela força e quais os mecanismos de absorção e transferência de carga para os tecidos adjacentes.

#### 3.4.1 Cinemática do contínuo

Em um meio dito contínuo, as distâncias entre as partículas componentes de um corpo são de tal ordem inferior ao volume das partículas dentro do corpo que se pode desconsiderá-las e tomar o corpo como se esse fosse um bloco compacto do material.

A cinemática do contínuo se incumbe de estudar os movimentos das partículas pertencentes a corpos dessa natureza, avaliando as trajetórias que obedecem em dado movimento e a relação de movimento de uma partícula com as demais de um mesmo corpo.

As trajetórias das partículas são explicitadas de acordo com equações denominadas equações cinemáticas do movimento.

#### 3.4.2 Campo de deslocamentos

Consideradas as trajetórias das partículas, o campo de deslocamentos possível é tal que um ponto  $P(x, y, z)$  na configuração indeformada, após uma transformação  $\mathbf{T}$ , tomará, na configuração deformada, a posição  $P'(x', y', z')$ .



O vetor deslocamento de uma partícula, da posição de referência para uma posição no tempo  $t$  pode ser expresso por

$$\vec{u} = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (3.34)$$

onde  $\vec{u}$  é o vetor de deslocamentos,  $\vec{X}$  é o vetor de posição na configuração de referência e  $\vec{x}(\vec{X}, t)$  é o vetor posição na configuração deformada, dependente da posição  $\vec{X}$  inicial e do tempo  $t$  decorrido.

Da equação (3.34) acima deduz-se que sempre que a expressão de caminho  $(\vec{x}(\vec{X}, t))$  de uma partícula é conhecida, seu campo de deslocamentos também é conhecido, de tal maneira que o movimento no contínuo pode ser expresso tanto pela equação de caminho quanto por seu vetor campo de deslocamentos (LAI, RUBIN & KREMPL, 1993).

### 3.4.3 Movimento de corpo rígido

O movimento de corpo rígido ocorre quando cada ponto material é deslocado de maneira idêntica aos demais.

As equações para movimento de corpo rígido são dadas por:

- **Translação de corpo rígido:** Cada ponto desloca-se com a mesma magnitude e mesma direção, em um tempo  $t$ .

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{X} + \vec{c}(t) \\ \vec{c}(0) = \vec{0} \\ \vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = \vec{c}(t) \end{cases} \quad (3.35)$$

- **Rotação em torno de um ponto fixo:** Seja  $\mathbf{R}(t)$  um tensor ortogonal,  $\vec{b}$  um vetor constante e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. A equação do movimento é dada por

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{b} = \mathbf{R}(t)(\vec{X} - \vec{b}) \\ \mathbf{R}(0) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (3.36)$$

- **Movimento geral de corpo rígido:** O movimento geral é dado pela soma de uma rotação e uma translação, tal que

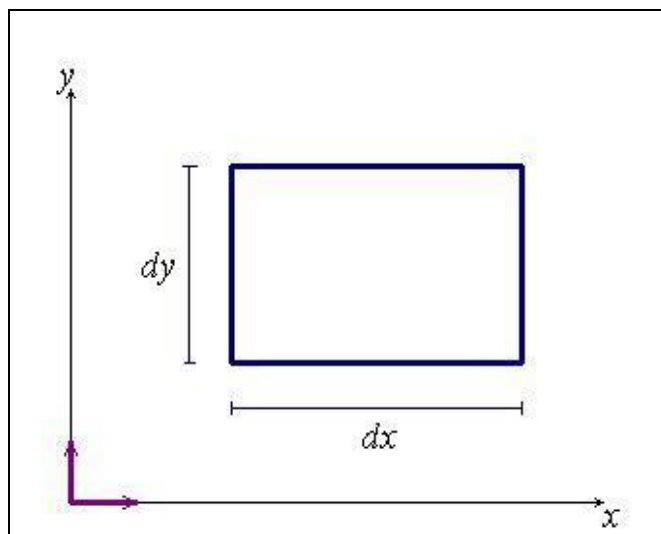
$$\begin{cases} \vec{x} = \mathbf{R}(t)(\vec{X} - \vec{b}) + \vec{c}(t) \\ \mathbf{R}(0) = \mathbf{I} \\ \vec{c}(0) = \vec{b} \end{cases} \quad (3.37)$$

### 3.4.4 Deformações

A avaliação da deformação de um corpo elástico baseia-se na suposição de que o corpo está devidamente restringido a fim de evitar-se um movimento de corpo rígido, tal que nenhum deslocamento de partículas do corpo é possível sem a deformação desse (TIMOSHENHO & GOODIER, 1970).

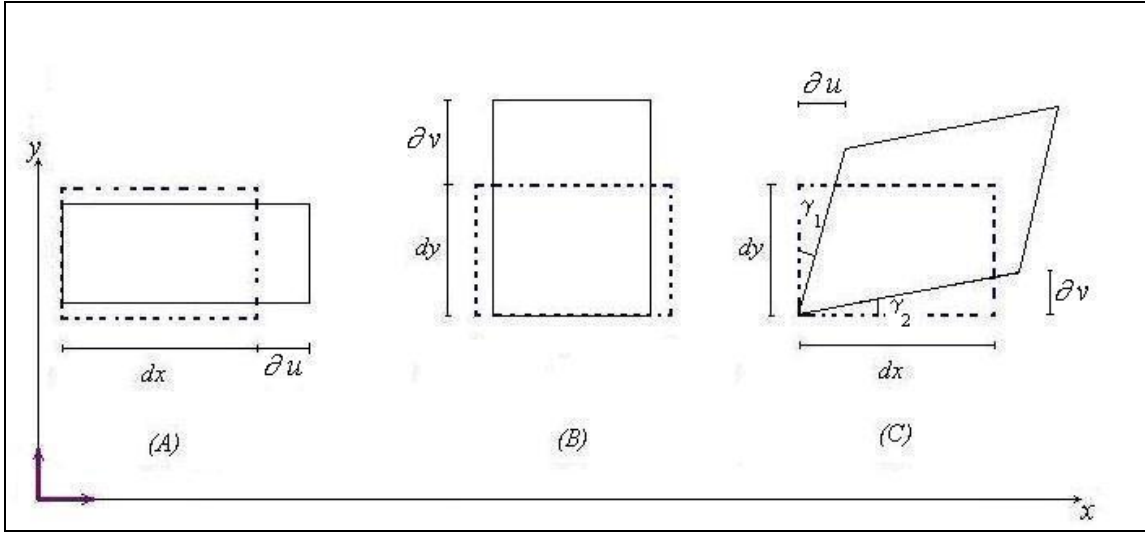
Como o presente trabalho visa abordar uma análise no estado plano de deformações, segue-se o exemplo plano de um paralelogramo infinitesimal de arestas paralelas aos eixos coordenados e com comprimentos eixos  $dx$  e  $dy$  (FIGURA 3.9), a deformação do contínuo, ocorre segundo uma variação no comprimento de suas arestas e nos ângulos entre elas formado (FIGURA 3.10).

FIGURA 3.9: PARALELOGRAMO INFINITESIMAL



Os pequenos deslocamentos  $\vec{u}$  de um corpo deformado são resolvidos para suas componentes  $u$ ,  $v$  paralelos aos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente.

FIGURA 3.10: PARALELOGRAMO E SUAS DEFORMAÇÕES: (A) AXIAL EM X; (B) AXIAL EM Y E (C) DISTORÇÃO ANGULAR.



Assume-se que essas componentes e suas derivadas, em relação aos eixos coordenados e em relação ao tempo, são quantidades muito pequenas, variando continuamente. Assim, pode-se negligenciar os termos não lineares se comparados com os lineares e tais componentes são assumidas como funções contínuas.

Dada uma superfície infinitesimal  $dx dy$ , o deslocamento de um ponto genérico  $P$ , na direção  $x$ , por exemplo, é de primeira ordem em  $dx$  e  $dy$ , tal que pode ser expresso por:

$$u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy \quad (3.38)$$

A componente em  $x$  do tensor de deformações  $\bar{\varepsilon}$  é dada por  $\partial u / \partial x$ . Identicamente, as deformações na direção  $y$  é dada por  $\partial v / \partial y$ .

Observações análogas podem ser feitas para a distorção angular sofrida por um ponto que varia de um eixo de orientação a outro. A essa alteração angular, chama-se deformação cisalhante entre dois planos.

A expressão do alongamento unitário, ou deformação linear unitária, é dada segundo as direções dos eixos para os quais as variações se verificam são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.39)$$

As expressões de distorção angular são assumidas como:

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ onde } \gamma_1 \cong \tan \gamma_1$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ onde } \gamma_2 \cong \tan \gamma_2$$
(3.40)

Em relação a figura 3.10 tem-se que as deformações normais dadas em (A) e (B) e expressas em (3.39) decorrem da ação de tensões normais. As tensões cisalhantes, porém, acarretam as distorções angulares, (C), expressas em (3.40) provocando variação na forma do elemento.

O elemento, inicialmente retangular, após distorcido, tem sua forma mudada e os lados não formam mais um ângulo reto. Essa distorção é dada por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$$
(3.41)

ou

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
(3.42)

As relações entre deformações e deslocamentos podem, ainda, ser expressas matricialmente por:

$$\varepsilon = \partial \cdot \vec{u}$$
(3.43)

onde

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \text{ sendo } \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy};$$
(3.44)

$$\partial = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ e } \vec{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}.$$
(3.45)

### 3.4.5 Equações de compatibilidade

Quando são conhecidas as componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do vetor de deslocamentos  $\vec{u}$ , pode-se determinar as seis componentes de deformação em alguma região onde as derivadas parciais em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  existam. Porém, dadas as componentes de deformação, arbitrariamente prescritas em alguma região, não é garantida a existência de funções de deslocamento (LAI, RUBIN & KREMPL, 1993).

A fim de garantir a existência das funções de deslocamento, é necessário verificar a identidade das seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (3.51)$$

onde  $\varepsilon(x, y, z)$  são funções contínuas que possuem segundas derivadas parciais contínuas em uma região simplesmente conexa e compõem o tensor  $\vec{\varepsilon}$ , denominado tensor infinitesimal de deformações.

### 3.4.6 Tensão

A noção intuitiva de tensão é a de uma força por unidade de área. Em determinadas ocasiões, quando uma peça tem seção transversal constante e a direção de aplicação das cargas permite, a tensão pode ser considerada uniformemente distribuída ao longo dessa seção transversal, caso seja aplicada em seu centro de gravidade. Contudo, no caso geral, os sólidos não têm seção transversal constante e quando solicitados por um determinado sistema de forças deformam-se criando tensões internas que, no caso mais geral, variarão de ponto para ponto e com a orientação dos planos que passam por esses pontos. Ao contrário das forças, das extensões e dos deslocamentos que são grandezas físicas mensuráveis, a tensão não é fisicamente mensurável. Trata-se, portanto, de um conceito matemático, embora de grande importância porque o conhecimento da distribuição de tensões permite avaliar se a peça pode resistir satisfatoriamente aos esforços aplicados.

Em um sólido em equilíbrio de forças e sob a ação de um conjunto de forças externas verifica-se que, em geral, a força não estará uniformemente distribuída ao longo de uma seção transversal. Para a obtenção da tensão em um ponto  $O$  qualquer, considera-se um elemento de área  $\Delta A$  existente no ponto  $O$  e  $\Delta \vec{f}$  a força interna resultante do equilíbrio de forças criado nessa área. A tensão no elemento de área considerado será:

$$\vec{\sigma} = \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (3.52)$$

A tensão  $\vec{\sigma}$  é portanto um vetor que tem a mesma direção e sentido de  $\Delta \vec{f}$ . Se  $\Delta A$  for reduzida continuamente, o valor limite da razão  $\Delta \vec{f} / \Delta A$  é a tensão no ponto  $O$ , ou seja:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (3.53)$$

Observe-se, no entanto, que a tensão  $\vec{\sigma}$  seria diferente para qualquer outro plano passando pelo ponto  $O$ .

Para haver equilíbrio de forças em qualquer plano da peça é necessário que as tensões que se desenvolvem nesse plano, na direção da força aplicada, sejam tais que se verifique a seguinte equação:

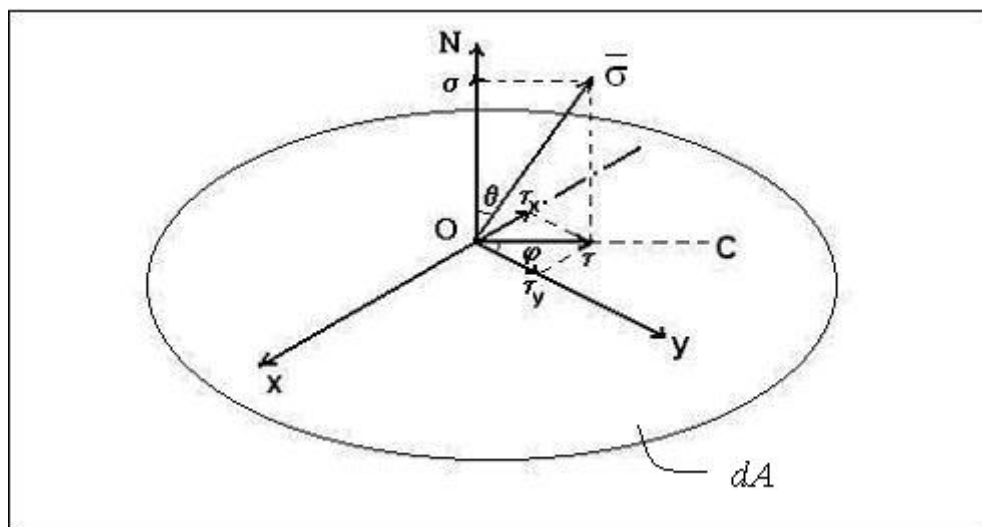
$$\vec{f} = \int_A \vec{\sigma} dA \quad (3.54)$$

em que  $A$  é a área do plano considerado e  $\vec{\sigma}$  as tensões em cada ponto do plano na direção da força  $\vec{f}$ .

Deve-se considerar que a estrutura molecular torna difícil a interpretação exata do conceito de tensão em um ponto porque, a rigor, o material não pode ser considerado localmente como um meio contínuo, e mais, homogêneo e isotrópico. Entretanto, em uma peça de dimensões globais superiores a bilhões de vezes à distância interatômica, o fato de existirem regiões microscópicas onde se verificam lacunas ou mesmo cristais de características locais anisotrópicas, pode ser aceito como tendo uma influência desprezível (SKINNER, 1984).

Por motivos práticos, a tensão  $\vec{\sigma}$  não é tomada diretamente, visto que faz ângulo com a área em que atua. Preferencialmente, é decomposta em duas componentes, uma tensão normal  $\sigma$ , que atua perpendicularmente a  $dA$  e uma tensão cisalhante,  $\tau$ , que existe no próprio plano que contém  $dA$  (FIGURA 3.11).

FIGURA 3.11: DECOMPOSIÇÃO DA TENSÃO TOTAL NAS SUAS COMPONENTES NO PLANO.



Da figura acima, depreende-se que a tensão normal é dada por:

$$\sigma = \frac{f}{A} \cos \theta = |\vec{\sigma}| \cos \theta \quad (3.55)$$

A componente tangencial, denominada tensão de corte é dada por:

$$\tau = \frac{f}{A} \sin \theta = |\vec{\sigma}| \sin \theta \quad (3.56)$$

A tensão de corte pode, ela mesma, ser decomposta em componentes paralelas às direções de  $dA$ ,  $x$  e  $y$ , para o caso acima:

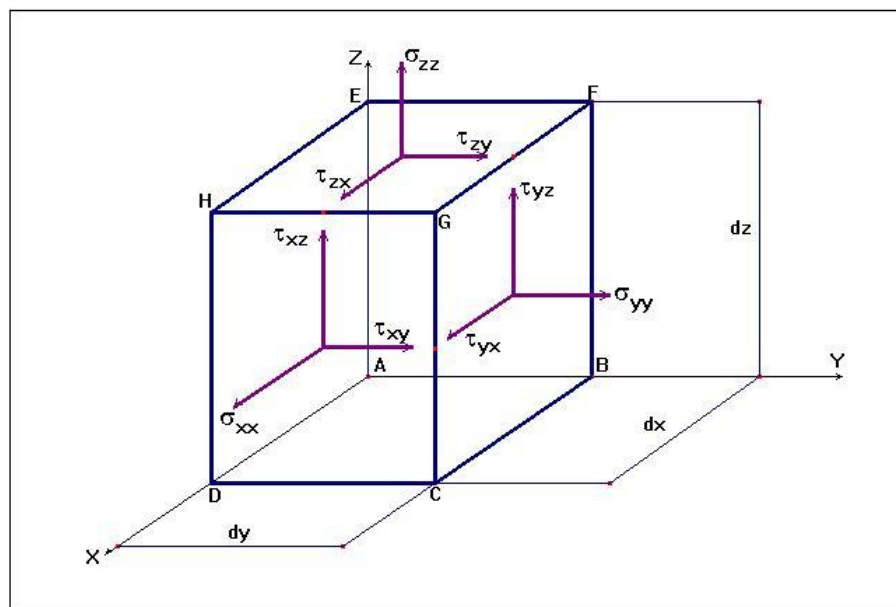
direção  $x$  
$$\tau_x = \frac{f}{A} \sin \theta \sin \varphi = |\vec{\sigma}| \sin \theta \sin \varphi \quad (3.57)$$

direção  $y$  
$$\tau_y = \frac{f}{A} \sin \theta \cos \varphi = |\vec{\sigma}| \sin \theta \cos \varphi \quad (3.58)$$

Conclui-se, portanto, que num plano qualquer, poderá haver uma tensão normal e duas tensões de corte.

A seguir, figura 3.12, exemplo de distribuição de tensões em um elemento cúbico infinitesimal, orientado em um sistema de eixos ortogonais. As tensões estão representadas por dois índices subscritos em que o primeiro indica a direção da normal ao plano em que atua e o segundo indica o eixo segundo o qual a tensão é exercida.

FIGURA 3.12: REPRESENTAÇÃO DAS TENSÕES EM ELEMENTO INFINITESIMAL TRIDIMENSIONAL



Adaptado de Timoshenko & Goodier (1970)



Encontrando-se em equilíbrio de tensões, não deve haver rotação e, portanto, os momentos de todas as forças devem anular-se. Calculando os momentos em relação a esse eixo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x dydz \frac{dy}{2} - \sigma_x dydz \frac{dy}{2} \right) + \left( \sigma_y dxdz \frac{dx}{2} - \sigma_y dxdz \frac{dx}{2} \right) + \\ & + \left( \tau_{xy} dydz dx - \tau_{yx} dydz dx \right) + \left( \tau_{zy} dydx \frac{dx}{2} - \tau_{zy} dydx \frac{dx}{2} \right) + \\ & + \left( \tau_{zx} dydz \frac{dy}{2} - \tau_{zx} dydz \frac{dy}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Resolvendo, vem:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.60)$$

De maneira análoga, dos momentos em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , obtêm-se, respectivamente,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  e  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Portanto, no caso tridimensional, têm-se seis parâmetros independentes de tensão: três tensões normais e três tensões de corte.

Porém, para que o estado de tensão num ponto fique completamente determinado, especificam-se as nove componentes de tensão nas faces ortogonais do elemento, característico do estado de tensão em um ponto. Como um vetor no espaço  $R^3$  só possui três componentes, a tensão não pode ser definida por um vetor, mas por um tensor.

Lai, Rubin & Krempl (1993) discorrem sobre a ordem dos tensores, lembrando que, algumas vezes, escalares e vetores são chamados de tensores de ordem zero e de primeira ordem, respectivamente. Entretanto, o conceito genérico de tensor está vinculado ao tensor de segunda ordem e representa uma transformação linear, que transforma vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  em vetores  $\mathbf{T}\vec{a}$  e  $\mathbf{T}\vec{b}$ , como explicitado na representação:

$$\mathbf{T}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\mathbf{T}\vec{a} + \beta\mathbf{T}\vec{b} \quad (3.61)$$

Como a tensão é um tensor de segunda ordem, as componentes do tensor das tensões são:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Saliente-se, ainda, que distintamente pode-se classificar as tensões como sendo:

- **Tensão de tração** – qualquer força induzida que resista a uma deformação causada por uma carga que procure distender ou alongar um corpo. Uma tensão de tração é sempre acompanhada por uma deformação por tração (Skinner, 1984).
- **Tensão de compressão** – se um corpo é colocado sobre a ação de uma carga que tende a comprimi-lo ou encurtá-lo, as forças internas que resistem a tal carga são chamadas tensões de compressão. A tensão de compressão é sempre acompanhada de uma deformação por compressão.
- **Tensão de cisalhamento** – tensão que tende a resistir a um movimento de torção ou de deslizamento de uma porção sobre outra de um corpo. Tensões de cisalhamento (também denominadas tensão de corte) são acompanhadas de deformações de cisalhamento.

Skinner lembra, ainda, que é muito difícil induzir uma tensão pura, de um único tipo, em um corpo. Quando um elemento é distendido, por exemplo, a própria concepção de distensão implica um deslizamento interno dos átomos, uns sobre os outros. Atente-se, também, que o fenômeno de estricção aponta para uma tensão de compressão transversalmente ao eixo da distensão.

Se uma tensão de tração axial, por exemplo  $\sigma_x$ , produzir uma deformação por tração,  $\varepsilon_x$ , com contrações conseqüentes nas direções  $y$  e  $z$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , respectivamente, a relação de  $\varepsilon_y / \varepsilon_x$  ou  $\varepsilon_z / \varepsilon_x$  é uma propriedade do material, conhecida como coeficiente de Poisson<sup>17</sup>,  $\nu$ , logo, em condições de isotropia:

$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (3.63)$$

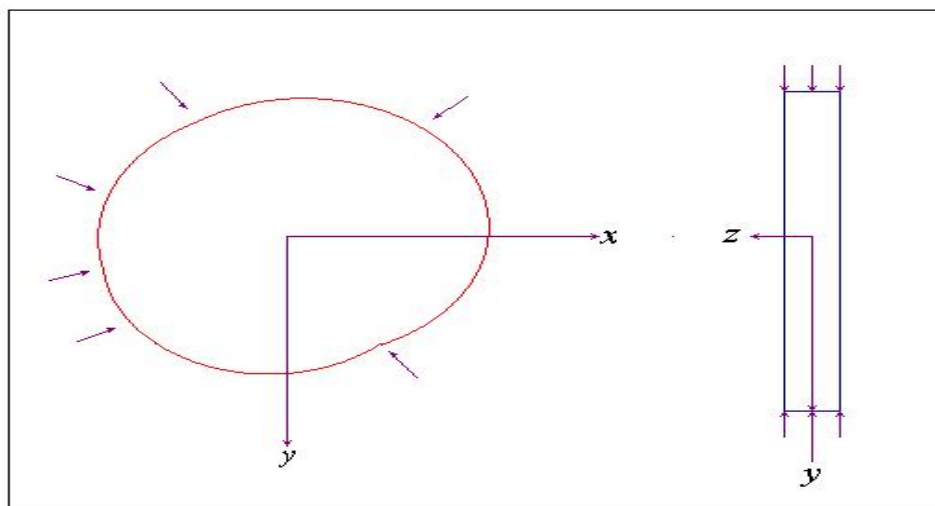
<sup>17</sup> Siméon Poisson (1781-1840) – Matemático francês.

A relação de Poisson relaciona-se à natureza e à simetria das forças de união interatômicas. Para que um átomo, ou molécula, isolado se mova para baixo e para dentro, durante a deformação, uma tensão e uma deformação por cisalhamento devem, igualmente, estar presentes.

### 3.4.7 Estado plano de tensões

Timoshenko & Gere (1983) explicita que o estado plano de tensões é um caso particular do estado de tensões a que está sujeito um corpo. Mais especificamente, considera-se que uma placa fina está carregada por forças aplicadas em seu contorno, paralelas ao plano da placa e distribuídas uniformemente sobre a sua espessura (FIGURA 3.13).

FIGURA 3.13: ESQUEMA SIMPLIFICADO DE UMA PLACA FINA SUBMETIDA A UM ESTADO PLANO DE TENSÕES



Adaptado de Timoshenko & Goodier (1970)

A hipótese básica do estado plano de tensões é a de que  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ , em ambas as faces da placa. Uma placa plana pode apresentar tensões normais e de cisalhamento nas faces  $x$  e  $y$  (FIGURA 3.14), porém não pode ter tensão nenhuma na face de normal coincidente com o eixo  $z$ . A tensão de cisalhamento na face  $x$  será indicada por  $\tau_{yx}$ . É usual considerar-se

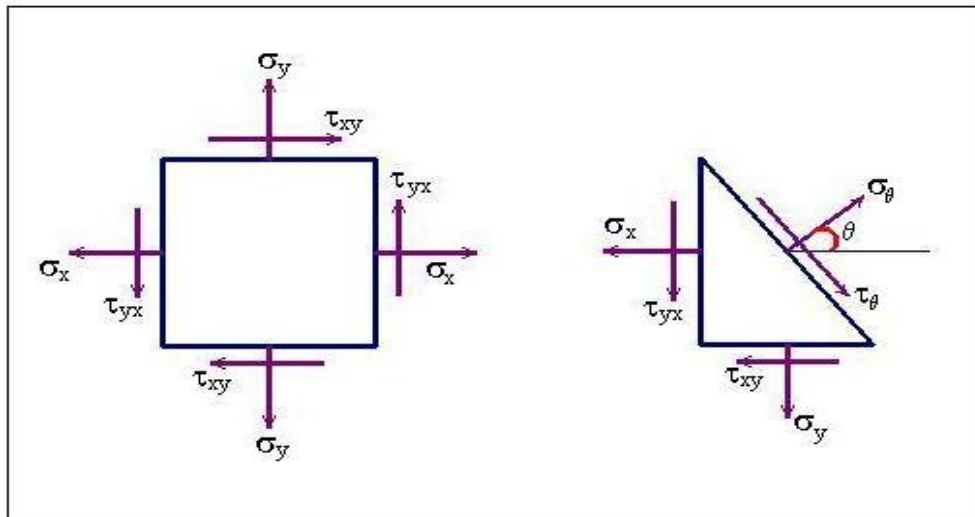
positiva a tensão que age no sentido positivo do eixo  $y$ . Assim,  $\tau_{yx}$  é positiva no sentido visto na figura. Analogamente, a tensão de cisalhamento na face superior do elemento é indicada por  $\tau_{xy}$ , significando que a tensão atua na face  $y$  e é positiva no sentido positivo do eixo  $x$ .

Sob tais considerações, o estado de plano de tensões resume-se de (3.62) para

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Da igualdade de tensões de cisalhamento em planos perpendiculares resulta que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (equação 3.60).

FIGURA 3.14: ESQUEMA DE ELEMENTO INFINITESIMAL SUJEITO A TENSÕES PLANAS



Adaptado de Timoshenko & Goodier (1970)

Das deduções possíveis, sobre a figura acima, em relação às forças atuantes nos planos, inclusive no plano inclinado, com as relações trigonométricas apropriadas, é possível escrever as seguintes expressões de  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$ , que são, respectivamente, as equações das tensões normal e de cisalhamento em função de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{yx}$ , num plano inclinado qualquer:

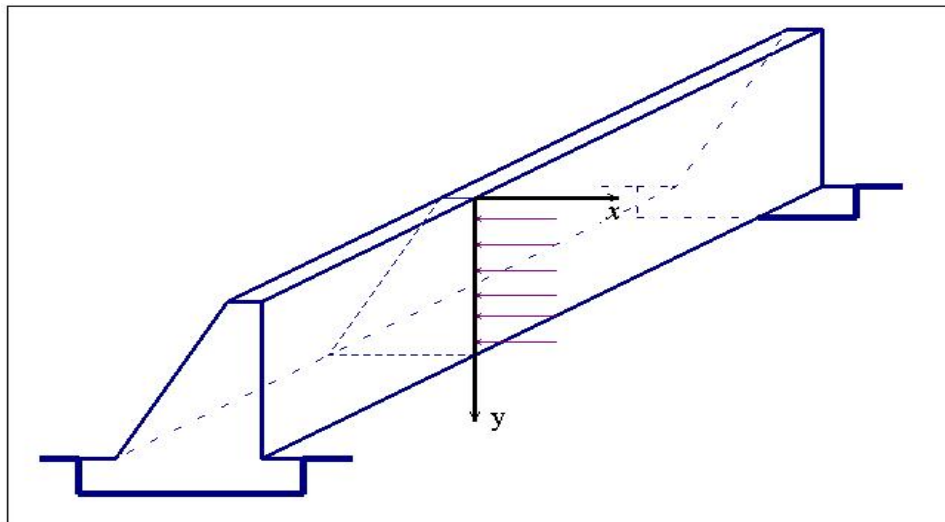
$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{yx} \sin 2\theta \quad (3.65)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{yx} \cos 2\theta \quad (3.66)$$

### 3.4.8 Estado plano de deformações

Outra simplificação admitida para um estado de tensões é o de uma situação onde a dimensão do corpo na direção  $z$  é muito grande e as forças que atuam perpendiculares ao eixo longitudinal da peça não variam ao longo do comprimento ou seja, assume-se que todas as seções transversais estão sob as mesmas condições (FIGURA 3.15).

FIGURA 3.15: ESQUEMA SIMPLIFICADO DE UM CORPO (BARRAGEM) SUBMETIDO A UM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES



Adaptado de Timoshenko & Goodier (1970)

Tal avaliação sustenta-se na hipótese de que as seções finais estão confinadas entre dois planos fixos, onde os deslocamentos na direção axial estão impedidos. Estando impedidos os deslocamentos nas seções finais e, por simetria, na seção média, assume-se que o mesmo se mantém para todas as seções transversais, logo

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Uma vez que as condições são mantidas para todas as seções transversais, é suficiente considerar uma fatia entre duas seções, de distância unitária entre elas. As componentes  $u$  e  $v$  do deslocamento são funções de  $x$  e  $y$ , e independentes da coordenada longitudinal  $z$ .

Porém, para a manutenção dos não-deslocamentos na direção  $z$ , é necessário que uma tensão atue nessa direção, a fim de impedir tais deslocamentos. Tal tensão é dada por

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{3.68}$$

Como as componentes de tensão  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são nulas, e  $\sigma_z$  é obtida de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , o estado plano de deformações, pode ser representado por (3.64), de maneira semelhante ao estado plano de tensões.

Assim como no caso do estado plano de tensões, é possível explicitar as deformações do estado plano, segundo as equações:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\sin 2\theta \tag{3.69}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\cos \theta \tag{3.70}$$

### 3.4.9 Tensões e deformações principais

Tensões principais são aquelas que assumem um valor mínimo ao longo de uma direção e máximo ao longo da outra. As direções onde essas tensões ocorrem são chamadas direções principais.

Quando o ângulo  $\theta$  da figura 3.14, varia de  $0^0$  a  $360^0$ , as tensões  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$  também variam e os valores máximo e mínimo de  $\sigma_\theta$  são as tensões principais. Os planos principais em que essas tensões ocorrem podem ser determinados derivando-se  $d\sigma_\theta / d\theta$ , igualando a zero e resolvendo para  $\theta$ , ou seja:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.71)$$

onde  $\theta_p$  indicam os ângulos que definem os planos principais. Há dois valores de  $2\theta_p$  com uma diferença de  $180^0$ , o primeiro entre  $0^0$  a  $180^0$  e o segundo entre  $180^0$  a  $360^0$ . Assim, tem-se dois valores de  $\theta_p$ , um entre  $0^0$  a  $90^0$  e outro entre  $90^0$  a  $180^0$ . Um desses valores acarreta  $\sigma_\theta$  máximo, o outro da  $\sigma_\theta$  mínimo. As duas tensões ocorrem em planos perpendiculares (TIMOSHENKO & GERE, 1983).

Usualmente designam-se as tensões principais por  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Suas expressões podem ser obtidas por:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (3.72)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (3.73)$$

De maneira similar, as tensões máximas de cisalhamento e os planos em que atuam são obtidas segundo a derivada  $d\tau_\theta / d\theta$  e igualando a zero, tal que:

$$\cot g 2\theta_s = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.74)$$

onde  $\theta_s$  indica o plano de tensão máxima de cisalhamento. Por comparação de (3.71) e (3.74), percebe-se que  $\cot g 2\theta_s = -\operatorname{tg} 2\theta_p$ , donde se conclui que  $2\theta_s$  e  $2\theta_p$  devem diferir de  $90^0$ . Assim, os planos de tensão máxima de cisalhamento estão a  $45^0$  com os planos principais. A expressão da tensão cisalhante máxima é dada por:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad (3.75)$$

ou

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.76)$$

Analogamente, pode-se obter as seguintes expressões das deformações principais:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{yx}}{2}\right)^2} \quad (3.77)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{yx}}{2}\right)^2} \quad (3.78)$$

e dos planos onde ocorrem:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{yx}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (3.79)$$

Nos planos principais, as deformações de cisalhamento são nulas. A deformação máxima de cisalhamento ocorre em planos a  $45^\circ$  com os planos principais e é calculada pela equação:

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{yx}}{2}\right)^2} \quad (3.80)$$

ou

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad (3.81)$$

Nos planos em que a deformação de cisalhamento é máxima, as deformações normais são  $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$ .



### 3.4.10 Elasticidade

Quando uma tensão é imposta a um corpo, a deformação resultante poderá ser de tal magnitude que o corpo retornará a sua configuração original quando da remoção das cargas, ou seja, os átomos voltarão a suas posições regulares.

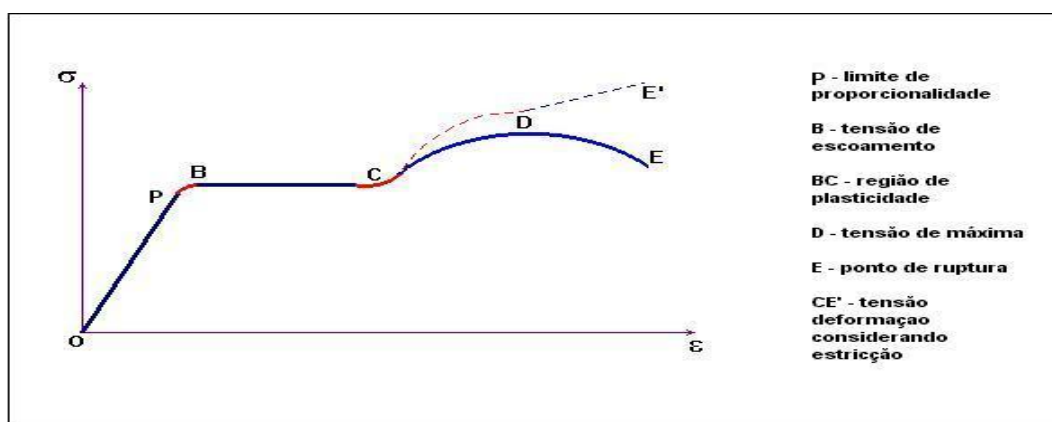
Se a carga sofrer aumento gradual, haverá um valor de tensão para o qual o corpo não retornará as dimensões originais após a liberação do carregamento. Nessa situação, diz-se que o corpo foi tensionado até o seu limite de elasticidade.

Da Lei de Hooke tem-se que a tensão é diretamente proporcional à deformação, no setor de deformações elásticas<sup>18</sup>. No entanto, se as cargas forem incrementadas, existirá um valor onde a razão tensão e deformação deixa de ser constante. Como consequência, a relação deixa de ser proporcional. Tal valor é tido como limite de proporcionalidade.

Quando a deformação aumenta significativamente independentemente de acréscimos significativos de tensão, tem-se o fenômeno de escoamento. Tal fenômeno, juntamente com os limites de elasticidade e de proporcionalidade, são de relevante interesse na análise estrutural de um material.

Os valores dos limites e sua localização podem ser idealizados num gráfico (FIGURA 3.16) para a curva de tensão-deformação. Saliente-se que tais gráficos, bem como os valores calculados são vinculados ao tipo de material em estudo.

FIGURA 3.16: ESQUEMA DE DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA UM MATERIAL SIMILAR AO AÇO ESTRUTURAL (FORA DE ESCALA)



Adaptado de Timoshenko & Goodier (1970)

<sup>18</sup> Válido para materiais de comportamento linear (aço, entre outros). Para materiais como borracha, por exemplo, o comportamento das curvas tensão X deformação pode ser não-linear.

Se qualquer valor de tensão igual ou menor que o limite de proporcionalidade for dividido por sua correspondente deformação, resultará uma constante de proporcionalidade conhecida como módulo de Young<sup>19</sup> ou módulo de elasticidade longitudinal  $E$ . Tal módulo relaciona-se basicamente à inclinação da curva da força contra a distância interatômica, para dado material.

A lei de Hooke, é expressa pela seguinte relação entre tensões, deformações e módulo de elasticidade:

$$\vec{\sigma} = E\vec{\varepsilon} \quad (3.82)$$

Se, em lugar de tensões não axiais, predominar uma tensão de cisalhamento, a deformação resultante pode ser usada para definir o módulo de cisalhamento para o material. O módulo de elasticidade transversal  $G$  pode ser calculado a partir do módulo de Young e do coeficiente de Poisson, de acordo com a expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.83)$$

O módulo de elasticidade relaciona-se apenas indiretamente às outras propriedades mecânicas. Dois materiais podem apresentar, por exemplo, o mesmo limite de proporcionalidade e ter módulos de elasticidade diferentes.

### 3.4.11 Equilíbrio de forças

A definição de equilíbrio, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), considera que um corpo  $B$ , ocupando um volume  $V$ , encontra-se em equilíbrio com o sistema de forças  $\vec{f} = (\vec{b}, \vec{p})$ , se para todo deslocamento virtual  $\delta\vec{u}$ , que satisfaça as condições cinemáticas de contorno, a distribuição de tensões  $\vec{\sigma}$ , associada ao sistema de cargas, é tal que a soma dos trabalhos internos realizados é igual, em módulo, ao total do trabalho externo.

$$W_i + W_e = 0 \quad (3.84)$$

---

<sup>19</sup> Thomas Young (1773-1829) – Médico e físico inglês.

### 3.4.11.1 Trabalho das forças internas

Da observação de que um corpo submetido a ações de forças externas deformantes, mantém suas partículas unidas, deduz-se a existência de alguma força interna que seja responsável por tal fenômeno.

O trabalho realizado pelos esforços internos  $W_i$ , em consequência de um campo de deformações virtuais gerado a partir de um campo de deslocamentos virtuais, pode ser expresso por:

$$W_i = - \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV \quad (3.85)$$

ou, em componentes infinitesimais espaciais

$$W_i = - \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dx dy dz \quad (3.86)$$

ou, ainda, na consideração do estado plano

$$W_i = - \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) d\Omega \quad (3.87)$$

para toda e qualquer deformação virtual  $\delta \varepsilon_x$ ,  $\delta \varepsilon_y$  e  $\delta \varepsilon_{xy}$  e  $\Omega$  representando o domínio bidimensional.

A expressão (3.87), pode ser expressa na forma vetorizada por:

$$W_i = - \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \right) d\Omega \quad (3.88)$$

ou, de forma compacta:

$$W_i = - \int_{\Omega} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\delta \varepsilon}) d\Omega \quad (3.89)$$

### 3.4.11.2 Trabalho das forças externas

Quando se impõe um deslocamento virtual em contraposição a uma posição natural de repouso, pode-se avaliar o trabalho realizado e conseqüentemente a força necessária para gerar o deslocamento virtual proposto, inclusive o peso do corpo.

O conceito de trabalho externo  $W_e$  realizado pelas forças externas  $\vec{f} = (\vec{b}, \vec{p})$ , em consequência de um campo de deslocamentos virtuais  $\delta\vec{u}$ , é dado pela seguinte definição:

$$W_e = \int_{\Omega} (\vec{b} \cdot \delta\vec{u}) dx dy + \int_{\Gamma} (\vec{p} \cdot \delta\vec{u}) d\Gamma \quad (3.90)$$

para todo e qualquer deslocamento virtual  $\delta\vec{u}$  e onde a carga de corpo  $\vec{b} = \{b_x(x, y) \quad b_y(x, y)\}^T$  está distribuída na superfície  $\Omega$  e a carga de linha  $\vec{p} = \{p_x(x, y) \quad p_y(x, y)\}^T$  está aplicada no contorno  $\Gamma$ .

Substituindo-se as expressões de (3.89) e (3.90) em (3.84), tem-se

$$-\int_{\Omega} (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{\varepsilon}) d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{b} \cdot \delta\vec{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{p} \cdot \delta\vec{u}) d\Gamma = 0, \quad \forall \delta\vec{u} \quad (3.91)$$

### 3.4.12 Equação constitutiva: estado plano de deformações

As equações constitutivas visam relacionar tensões e deformações, levando em consideração as constantes físicas dos materiais. Tais equações variam segundo o tipo de análise que seja feita. Para o caso de materiais isotrópicos elásticos lineares, submetidos a processos isotérmicos e adiabáticos, avaliando-se o estado plano de deformações, a relação

$$\vec{\sigma} = E \vec{\varepsilon} \quad (3.92)$$

é expressa por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

### 3.4.13 Flexibilidade e Resiliência

Na área foco do presente trabalho, odontologia, bem como em diversas outras áreas de atividade, os ensaios em materiais visam verificar se os mesmos possuem valores altos para o limite de elasticidade, pois se espera que a estrutura retorne à sua forma original após ter sido submetida a tensões. Requer-se, também, alto módulo de elasticidade, pois que uma deformação pequena é freqüentemente desejada sob tensões consideráveis.

Em determinadas circunstâncias, deformações maiores podem ser necessárias, sob tensões moderadas. Em tais situações a estrutura é dita flexível e apresenta a propriedade de flexibilidade. A flexibilidade máxima é expressa segundo a seguinte manipulação da Lei de Hooke:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E} \quad (3.94)$$

onde o subíndice  $p$  relaciona-se a identificação de que tensão e deformação estão sendo tomadas no limite de proporcionalidade (FIGURA 3.16).

Com relação ao sistema estomatognático, as tensões são o resultado de uma força criada pelo movimento da mandíbula contra a maxila. Tais forças são ditas dinâmicas posto que as cargas não são aplicadas de forma constante, por tempo determinado. Muitos materiais são sensíveis à velocidade de deformação. Dessa informação e da densidade do material pode-se estabelecer o módulo de elasticidade. Tais módulos dinâmicos são, freqüentemente, maiores que os valores obtidos em medidas estáticas.

As forças dinâmicas existem por tempo infinitesimalmente curto, a deformação resultante dificilmente pode ser medida. Entretanto, a energia induzida na estrutura pela força instantânea permite uma mensuração objetiva; à medida que aumenta o espaço interatômico, aumenta a energia interatômica. Enquanto essa tensão não for maior que o limite de proporcionalidade, essa energia será conhecida como resiliência.

Apesar de o termo resiliência ser popularmente associado com a ação de uma mola, de um ponto de vista mais técnico, a resiliência pode ser definida como a quantidade de energia absorvida por uma estrutura, quando sofre tensões não superiores ao seu limite de proporcionalidade.

Skinner (1984) observa que trabalho é o produto da força atuante pela distância promovida pela ação dessa força. Quando um trabalho é realizado em um corpo, certa energia lhe é fornecida. Conseqüentemente, quando um material está sob tensão ele absorve energia. Como, por definição, a tensão induzida não é maior que o limite de proporcionalidade, para que a estrutura não venha a ser deformada permanentemente, apenas precisa ser discutida a energia absorvida, e devida à deformação elástica. O módulo de resiliência relaciona-se com o limite de proporcionalidade, o módulo de elasticidade e a flexibilidade máxima, segundo:

$$\text{resiliência} = \frac{\sigma_p^2}{2E} \quad (3.95)$$

O módulo de resiliência é igual à área situada sob a porção retilínea da curva de tensão-deformação (FIGURA 3.16), onde  $P$  determina a altura do triângulo que possui como base a flexibilidade máxima.

### 3.4.14 Força de impacto

Uma força dinâmica, em sua reação durante a colisão com uma estrutura, é chamada de força de impacto. A energia de impacto torna-se importante, por exemplo, durante a mastigação. É essa energia do impacto dos dentes sobre o bolo alimentar que determina, parcialmente, a eficiência da mastigação.

O peso de um objeto sobre uma superfície pode não produzir alterações visíveis. Porém, caso o objeto se choque contra a superfície, a força de impacto será muito maior que a força estática causada apenas pelo seu peso.

No impacto há troca de energia. A capacidade da superfície de absorver a energia sem deformação permanente, ou seja, sua capacidade de resistir elasticamente ao impacto estará relacionada ao seu módulo de resiliência, ao volume,  $V$ , e a uma constante geométrica de proporcionalidade,  $K$ , tal que:

$$\text{Capacidade de choque} = \frac{KV\sigma_p^2}{2E} \quad (3.96)$$

A constante  $K$  explicita como a geometria da peça pode auxiliar na sua capacidade de absorver o choque.

### 3.4.15 Deformação permanente

Quando a força resultante na estrutura atinge o máximo, os átomos separam-se permanentemente e ocorre a fratura. Também poderá ocorrer de os átomos tornarem-se localmente desarranjados, ao invés de fraturar a estrutura.

Acima do limite de proporcionalidade, ponto  $P$  da figura 3.16, o gráfico não é mais uma reta. Não se mantém mais a proporcionalidade entre a tensão e a deformação, sendo o traçado exato da curva, após esse ponto, imprevisível. Mesmo que a tensão seja retirada, a deformação tende a permanecer, caracterizando a zona de plasticidade do material.

### 3.4.16 Ductilidade e Maleabilidade

Quando uma estrutura sofre tensões superiores ao seu limite de proporcionalidade, ela se torna permanentemente deformada. Se as tensões forem do tipo de tração, e o material puder suportar deformações permanentes consideráveis sem ruptura, ele será chamado dúctil. A ductilidade depende da plasticidade e da resistência à tração.

Se, no entanto, o ensaio der-se sob compressão e o material possuir a habilidade de resistir à deformação permanente sem ruptura, então o material é dito maleável. A maleabilidade depende, também, da plasticidade, mas não é tão dependente da resistência, como a ductilidade.

### 3.4.17 Dureza

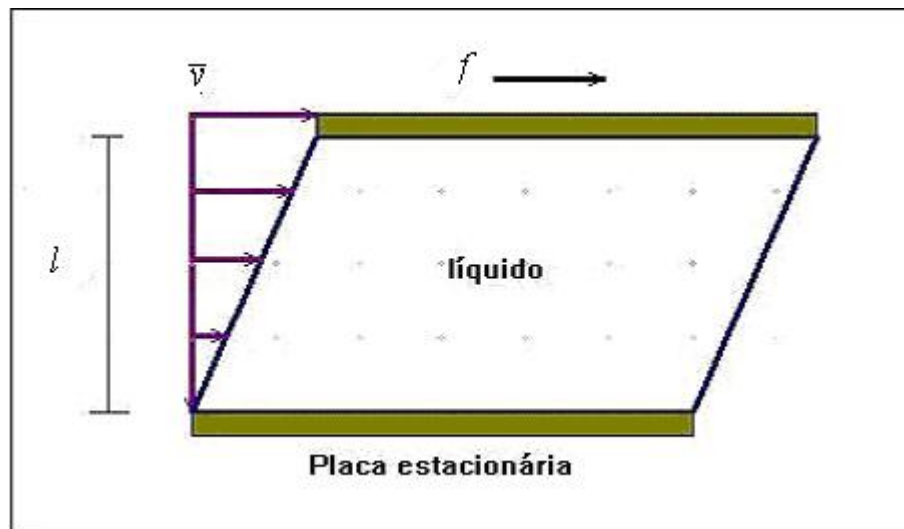
A dureza superficial é o resultado da interação de propriedades como resistência, limite de proporcionalidade, ductilidade, maleabilidade e a resistência à abrasão e ao corte. Devido a tal concorrência de fatores, torna-se difícil a definição exata para o conceito, em geral aceito como resistência à penetração e ao risco.

Existem diversos ensaios de dureza superficial, dentre eles Rockwell, Brinell, Vickers e Knoop, todos, em geral, avaliando a resistência de um material à penetração de um dispositivo (esfera, agulha, cilindro, etc.).

### 3.4.18 Reologia

A reologia é a ciência que se ocupa do estudo do escoamento. Embora um líquido em repouso não possa suportar tensão de cisalhamento, a maioria dos líquidos, quando colocados em movimento, resiste a forças atuantes que tendem a movê-lo. Tal resistência é conhecida como viscosidade e pode ser encarada como devida às forças internas de atrito, no líquido.

FIGURA 3.17: ESQUEMA DE CISALHAMENTO EM UM LÍQUIDO



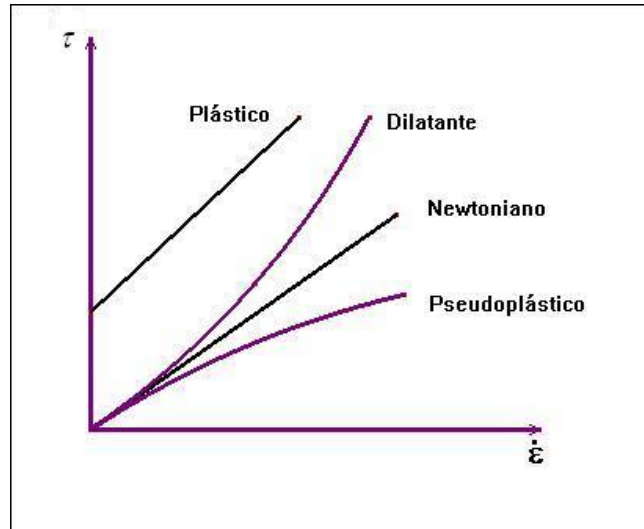
A figura 3.17 exemplifica um fluido ocupando o espaço entre duas placas metálicas; a inferior fixa e a superior com liberdade de locomoção para direita, com certa velocidade  $\vec{v}$ . Uma força  $\vec{f}$  é necessária para superar a resistência produzida pelo atrito (viscosidade) do líquido.

Sendo  $l$  a distância entre as duas placas, a deformação será  $\vec{v}/l$ . Como, porém,  $\vec{v}$  é uma velocidade, e não um deslocamento,  $\vec{v}/l$  torna-se uma velocidade



de deformação  $\dot{\epsilon}$ . Alterando-se  $\vec{f}$ , obtém-se novos valores para  $\vec{v}$  e pode-se obter uma curva força e velocidade (Figura 3.18), análoga às curvas de carga-deslocamento, já explicitada para sólidos.

FIGURA 3.18: ESQUEMA DE CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO PARA FLUIDOS.



Um fluido ideal demonstra uma tensão de cisalhamento proporcional à velocidade de deformação. Esse desempenho é chamado *newtoniano*. Com a viscosidade definida por:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} \quad (3.97)$$

onde  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade e  $\dot{\epsilon} = d\epsilon / dt$  é a taxa de deformação, um fluido newtoniano apresenta viscosidade constante, que não depende da velocidade de deformação. A viscosidade, para a reologia, é o análogo do módulo de elasticidade para a elasticidade.

Muitos materiais dentários apresentam comportamento *pseudoplástico*, cujas viscosidades diminuem com o aumento da velocidade de cisalhamento. *Dilatantes* são líquidos que apresentam tendência oposta, ou seja, tornam-se mais rígidos à medida que aumenta a velocidade de deformação. Outras classes de materiais comportam-se como um corpo rígido até um valor mínimo de cisalhamento, tais materiais são denominados *plásticos*.

A viscosidade na maioria dos líquidos diminui rapidamente com o aumento da temperatura. Pode, também, depender do estado de deformação prévia do líquido; tais líquidos são ditos tixotrópicos. Tais materiais se agitados apresentam valor de viscosidade inferior ao mesmo material se considerado na condição imperturbada.

O escoamento estático é uma deformação produzida em um sólido completamente endurecido, sujeito à tensão constante. O escoamento dinâmico refere-se a esse fenômeno quando as tensões aplicadas flutuam, como em um teste de fadiga. Como o escoamento produz deformação plástica continuada, o processo pode ser destrutivo.

Outra modalidade de escoamento (*flow*) em contraposição ao anteriormente visto (*creep*) é, particularmente, um atributo de materiais amorfos, tais que fraturam-se sob impacto, porém, escoam sob a ação de seu próprio peso.

### 3.4.19 Critérios de escoamento

Vários são os critérios para avaliação das condições de escoamento dos materiais e das tensões onde tais materiais são admitidos como elásticos. Dentre esses critérios, pode-se destacar o critério de Von Mises<sup>20</sup> ou critério da máxima energia de distorção relacionada a mudanças de forma do material.

O critério de Mises baseia-se na observação experimental de que a pressão hidrostática, responsável pela variação de volume de um sólido, não provoca falhas. Como a deformação plástica se dá a volume constante, a componente hidrostática existente num dado estado complexo de tensões aplicado a um corpo não influencia a tensão para o qual a falha principia. Interessa-nos, então, a tensão equivalente e o material é considerado no regime elástico enquanto  $\sigma_{eqv} \leq \sigma_{esc}$ , onde  $\sigma_{esc}$  é a tensão de escoamento do material, determinada em ensaios de tração.

Em materiais isotrópicos, o critério de falha deve ser independente da escolha dos eixos, ou seja, ser uma função dos invariantes do sistema das tensões de desvio. Von Mises propôs que a falha tem lugar quando o segundo invariante das tensões de desvio excede um determinado valor crítico do material (BRANCO 1985, apud ALENCAR, 2002).

---

<sup>20</sup> Richard Von Mises (1883-1953) – Matemático holandês.

A tensão equivalente é expressa, segundo as tensões principais, por:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (3.98)$$

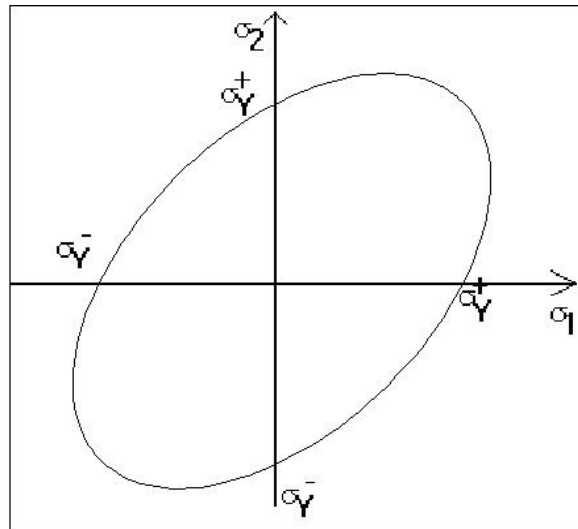
Ou, em função das tensões normais e cisalhantes

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (3.99)$$

0)

Graficamente, para o estado plano, pode-se avaliar a região admissível para o regime elástico, segundo a elipse de Mises (FIGURA 3.19), onde cada par de coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2)$  representa o estado de tensões em um ponto do corpo. A região interna a elipse indica a atuação de tensões no regime elástico, o contorno indica plastificação e a região externa é inacessível.

FIGURA 3.19: ELIPSE DE MISES.



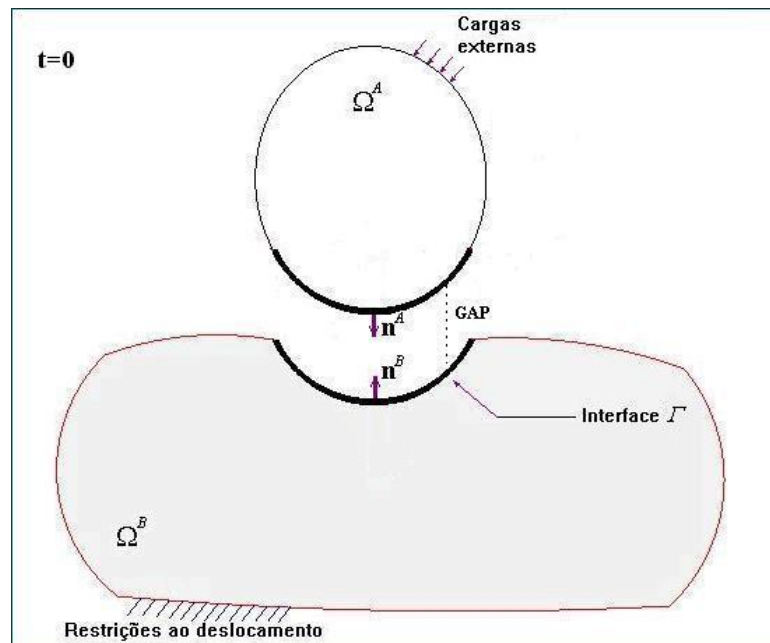
### 3.5 Teoria do Contato

A abordagem da teoria de contato envolve o tratamento de um problema de deformação finita em um meio contínuo, restringido pela presença de um obstáculo rígido e imóvel (SIMO & LAURSEN, 1992).

Quando o corpo em movimento contacta o obstáculo, apenas parte de suas superfícies entram efetivamente em contato. Os diversos comportamentos que uma superfície pode ter em relação à outra, seja de giro, rolamento ou deslizamento, deverão estar contemplados no modelo teórico desse contato.

Segundo Gei, Genna & Bigoni (2002), a descrição da teoria do contato considera dois corpos contínuos definidos pelas regiões  $\Omega^A$  e  $\Omega^B$  no espaço Euclidiano<sup>21</sup> tridimensional, interagindo entre si por meio de uma superfície de contato, suficientemente suave, indicada por  $\Gamma_c$ . Em cada ponto da superfície de contato dois versores normais podem ser definidos:  $\mathbf{n}^A$  e  $\mathbf{n}^B$ , direcionados através de  $\Omega^A$  e  $\Omega^B$ , respectivamente, e com  $\mathbf{n}^B = -\mathbf{n}^A$  (FIGURAS 3.20 e 3.21).

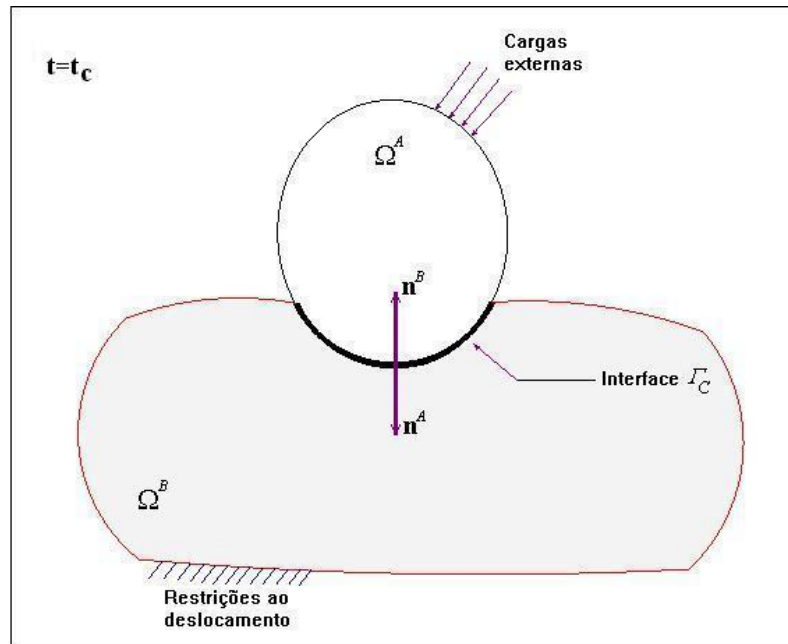
FIGURA 3.20: SUPERFÍCIES DE POTENCIAL CONTATO E DO GAP ENTRE ELAS, TEMPO  $t=0$ .



Adaptado de Gei, Genna & Bigoni (2002).

<sup>21</sup> Euclides de Alexandria (sem datas) – Matemático grego.

FIGURA 3.21: ESBOÇO DE DOIS CORPOS EM CONTATO EM UMA INTERFACE  $\Gamma_c$ , NO TEMPO  $t$



Adaptado de Gei, Genna & Bigoni (2002).

Para Bathé & Bouzinov (1997), o equilíbrio das condições nos dois corpos, na configuração deformada e no tempo  $t$  é governado pelo PTV e expresso por:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\varepsilon}) d\Omega = \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} (\vec{b} \cdot \delta \vec{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{p} \cdot \delta \vec{u}) d\Gamma \right\} + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c} (\delta \vec{u}_c \cdot \vec{f}_c) d\Gamma_c \quad (3.100)$$

que é a mesma equação 3.91 onde a parcela  $\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c} (\delta \vec{u}_c \cdot \vec{f}_c) d\Gamma_c$  representa o

acréscimo do contato à expressão e o índice  $i = 1..2$  nos somatórios informam tratar-se do contato entre dois corpos. Saliente-se que as trações desconhecidas do contato agem num contorno  $\Gamma_c$  desconhecido e cuja região deverá ser calculada.

Pequenos deslocamentos e deformações são assumidos nos dois corpos, caracterizados por uma lei constitutiva (em geral considerada como linear e elástica) e sujeita a tração e condições de deslocamentos nos contornos  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$ , exceto na zona de contato  $\Gamma_c$ , que por se tratar de uma interface de comportamento não-linear, requer uma lei constitutiva específica.

Note-se das figuras 3.20 e 3.21, que cada corpo se mantém de maneira que, na ausência de contato, não há possibilidade de movimento de corpo rígido. A fim de caracterizar a interface, dois requerimentos são considerados essenciais:

1. O vetor de tensão permanece contínuo através da interface, tal que:

$$\vec{\sigma}^B \vec{n}^B = -\vec{\sigma}^A \vec{n}^A \quad (3.101)$$

2. O vetor de tensão pode ser decomposto segundo suas componentes normais e tangenciais  $\lambda$  e  $c$ :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^B &= \lambda \vec{n}^B + c \vec{s}^B \\ \vec{\sigma}^A &= \lambda \vec{n}^A + c \vec{s}^A \end{aligned} \quad (3.102)$$

3. Os deslocamentos devem projetar-se através da interface, porém assumindo uma lei constitutiva que relacione essa projeção com o vetor de tensões

$$\vec{\sigma}^B = g(\delta, \vec{n}^B, \vec{s}^B) \quad (3.103)$$

A função vetorial  $g(\bullet)$ , em (3.103), representa o *GAP* e é dependente de  $\delta = \vec{u}^A - \vec{u}^B$ , a projeção no deslocamento, e dos versores  $\vec{n}^B$  e  $\vec{s}^B$ , com  $\vec{s}^B$  contido em um plano tangente à interface.

As condições que a função  $g(\bullet)$  deve apresentar são dadas por:

$$g \geq 0; \quad \lambda \geq 0; \quad g\lambda = 0 \quad (3.104)$$

A equação constitutiva (3.103) deve satisfazer certos requisitos. Considerando-se o problema foco do presente trabalho, análise bidimensional de um ligamento periodontal e, segundo Gei, Genna & Bigoni (2002), na ausência de resultados experimentais detalhados, tem havido um direcionamento pela consideração da simplicidade de modelos isotrópicos no plano tangencial, bem como pela assunção da existência de um potencial, o que guarda maior consistência com as leis gerais de termodinâmica.

Como tal assume-se:

1. isotropia no plano tangencial, tal que a função  $g(\bullet)$  se torne uma função de  $\delta$  e  $\vec{n}^B$  somente.

$$\sigma^B \vec{n}^B = g(\delta, \vec{n}^B) \quad (3.105)$$

2. invariância de  $g(\bullet)$  sob qualquer transformação ortogonal  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}g(\delta, \vec{n}^B) = g(\mathbf{Q}\delta, \mathbf{Q}\vec{n}^B) \quad (3.106)$$

3. existência de uma interface potencial  $\psi$  (função escalar dos vetores  $\delta$  e  $\vec{n}^B$ ), tal que:

$$g(\delta, \vec{n}^B) = \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \quad (3.107)$$

e

$$\mathbf{Q}\psi(\delta, \vec{n}^B) = \psi(\mathbf{Q}\delta, \mathbf{Q}\vec{n}^B) \quad (3.108)$$

Como consequência,  $\psi$  deve depender somente do produto escalar de  $\delta$  e  $\vec{n}^B$ , e do módulo de  $\delta$  (TRUEDELL & NOLL, 1965 *apud* GEI; GENNA & BIGONI, 2002), tal que

$$\psi = \psi(\delta_n, \delta_t) \quad (3.109)$$

onde

$$\delta_n = \delta \cdot \vec{n}^B \quad (3.110)$$

e

$$\delta_t = \|\delta_t\| = \|\delta - \delta_n \vec{n}^B\| \quad (3.111)$$

Para a inclusão de condições de atrito, considera-se que a lei de atrito de Coulomb mantém-se para as superfícies de contato e  $\mu$  define o coeficiente de fricção, não se diferenciando coeficientes estáticos de dinâmicos em abordagens simplificadas de problemas (BATHÉ & BOUZINOV, 1997).

Assume-se, ainda:

- uma variável adimensional  $\tau$  dada por:

$$\tau = \frac{c}{\mu\lambda}; \quad \lambda > 0 \quad (3.112)$$

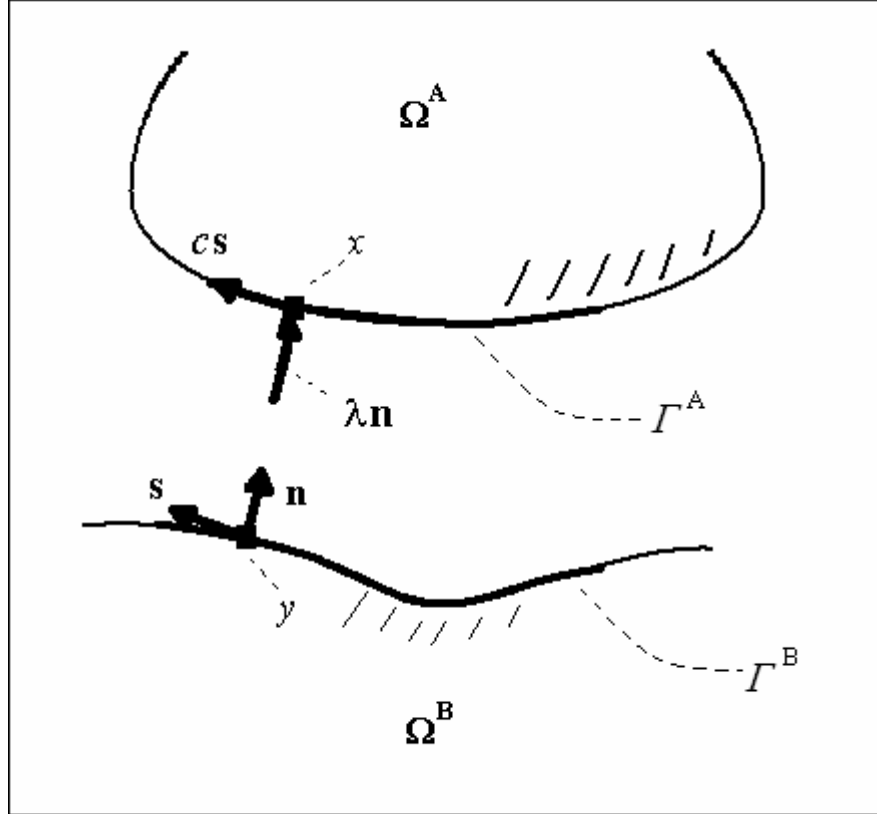
onde  $\mu\lambda$  é dita resistência ao atrito;

- Magnitude da velocidade tangencial relativa ao versor  $\vec{s}$ , em  $y^*(x, t)$  dada por:

$$\dot{u}(x,t) = (\dot{u}^B|_{y(x,t)} - \dot{u}^A|_{(x,t)})^T \vec{s} \quad (3.113)$$

onde em  $y^*(x,t)$  é o ponto no contorno  $\Gamma^B$ , mais próximo do ponto  $x$  no contorno  $\Gamma^A$  (FIGURA 3.22).

FIGURA 3.22: DEFINIÇÃO DAS COMPONENTES DO CONTATO.



Adaptado de Bathé & Bouzinov (1997)

Com as definições acima, a lei de atrito de Coulomb estabelece que:

$$|\tau| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} < 1 \Rightarrow \dot{u} = 0 \\ = 1 \Rightarrow \text{signal}(\dot{u}) = \text{signal}(\tau) \end{cases} \quad (3.114)$$

A solução do problema de contato impõe, então, a solução da equação do trabalho virtual (3.100) sujeita às condições dadas nas equações (3.104) e (3.114).



### 3.6 Teoria de mola

O comportamento viscoelástico dos materiais tem sido estimado por meio de modelos reológicos baseados em dois elementos fundamentais: um segmento de mola e um segmento de pistão lubrificado. Para o segmento de mola, a relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke:

$$\vec{\sigma}(t) = E\vec{\varepsilon}(t) \quad (3.115)$$

Durante um ensaio de fluência (aumento gradual de deformação ao longo do tempo sob um certo nível de tensão constante), a deformação será constante ao longo do tempo e expressa por:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{\sigma}}{E} \quad (3.116)$$

De modo similar, em um ensaio de relaxação (diminuição gradual da tensão ao longo do tempo sob um certo nível de deformação constante), a tensão será constante ao longo do tempo e expressa por:

$$\vec{\sigma} = E\vec{\varepsilon} \quad (3.117)$$

O pistão, por sua vez, pode ser visualizado como um macaco hidráulico que desloca um fluido viscoso em um cilindro com fundo vazado, segundo a seguinte taxa de deformação:

$$\dot{\vec{\varepsilon}}(t) = \frac{\vec{\sigma}(t)}{\eta} \quad (3.118)$$

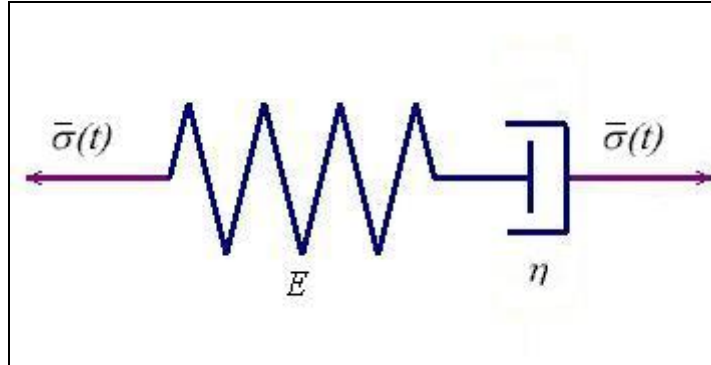
A equação (3.118) é similar a equação (3.97), porém com a consideração de ser a carga, no caso de mola, aplicada em direção normal à superfície, em decorrência é tomada a tensão normal e não a cisalhante com o caso avaliado em (3.97).

Formulações complexas podem ser obtidas pela combinação de molas e pistões. Uma das configurações mais simples consiste em juntar uma mola e um pistão em série ou paralelo. O elemento de Maxwell<sup>22</sup> compreende um segmento de mola conectado em série com um pistão (FIGURA 3.23). A deformação no elemento de Maxwell pode ser dividido em um porção elástica  $\varepsilon_e$  e uma porção viscosa  $\varepsilon_v$ , tal que:

<sup>22</sup> James Clerk Maxwell (1831-1879) – Físico escocês.

$$\vec{\varepsilon}(t) = \vec{\varepsilon}_e(t) + \vec{\varepsilon}_v(t) \quad (3.119)$$

FIGURA 3.23: ELEMENTO DE MOLA DE MAXWELL



Derivando as equações de compatibilidade (3.119) e constitutiva (3.115) com relação ao tempo e aplicando à equação (3.118), obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\bar{\sigma}(t)}{\eta} \quad (3.120)$$

Pode-se observar que para uma mola rígida ( $E = \infty$ ) o modelo se reduz ao de um fluido Newtoniano; da mesma maneira, se o pistão se torna rígido ( $\eta = \infty$ ) o modelo se reduz a uma mola Newtoniana.

A resposta do modelo de Maxwell a vários tipos padronizados de tensão ou de deformação dependentes do tempo pode ser determinada pela solução da equação anterior.

Considerando o ensaio de fluência, com a condição inicial de  $\bar{\sigma}(t) = \sigma_0$  no tempo inicial  $t = 0$ , tem-se:

$$\int \dot{\varepsilon}(t) dt = \int \left[ \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\bar{\sigma}(t)}{\eta} \right] dt \quad (3.121)$$

que resulta

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t \quad (3.122)$$

O modelo prevê que há um aumento da deformação sem limites. Se após o experimento de fluência, o sistema é descarregado no tempo  $t_1$ , a deformação

elástica na mola  $\sigma_0 / E$  recupera-se instantaneamente, enquanto a deformação  $(\sigma_0 / \eta) \cdot t$  permanece no pistão.

Em um experimento de relaxação, onde a deformação  $\varepsilon_0$  é constante, o modelo prevê a seguinte integração:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon_0 \cdot e^{\frac{-E \cdot t}{\eta}} \quad (3.123)$$

A relação  $T = \eta / E$  é conhecida por índice de relaxação e ajuda a caracterizar a resposta viscoelástica de um material. Índices pequenos de relaxação indicam que o processo de relaxação será rápido. No caso extremo de um fluido viscoso ( $E = \infty$ ), a equação indica uma tensão de relaxação infinitamente rápido  $T = 0$ ; enquanto para uma mola elástica ( $\eta = \infty$ ), a tensão não relaxaria, visto que  $T = \infty$ .

## Capítulo 4

### Método dos elementos finitos

No âmbito da engenharia de estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objetivo a determinação do estado de tensão e deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a carregamentos externos (AZEVEDO, 2003). Porém, a idéia central do método é a interpolação. Consiste, pois, em se propor uma solução aproximada para o problema como combinação linear de funções polinomiais com características específicas.

Segundo Zienkiewicz & Taylor (1988), a formulação do MEF pode basear-se no método dos deslocamentos, em modelos de equilíbrio, ou em modelos híbridos e mistos.

Métodos como deslocamentos e forças são particularmente simples e de aplicação imediata no trato de estruturas reticuladas (constituídas de barras prismáticas com seção transversal de dimensões muito inferiores ao comprimento do seu eixo). No entanto, tais métodos são de difícil extensão aos meios contínuos.

Antes do aparecimento do MEF, a análise dos meios contínuos era efetuada por resolução direta dos sistemas de equações de derivadas parciais que regem o fenômeno, tendo em consideração as necessárias condições de fronteira. Para facilitar a aplicação dessa técnica a problemas não elementares, era comum recorrer

a séries de Fourier<sup>23</sup>. Devido à sua complexidade, esses procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogêneos e de geometria simples (AZEVEDO, 2003).

No entanto, solucionar sistemas de equações diferenciais não é trivial. Concorre para a sua dificuldade o fato de que em determinadas situações não são possíveis manipulações para a busca de solução analítica da equação dada, ou, ainda que possível, é mais conveniente dar tratamento numérico para aproximação da solução do problema. Em geral, recorre-se a formulações integrais.

Apesar das formulações integrais já serem conhecidas a longo tempo, suas aplicações não puderam se generalizar de imediato pela dificuldade em resolver facilmente os sistemas algébricos lineares e não-lineares de grandes dimensões.

Com o advento do avanço computacional, o MEF teve grande impulso na década de 60, passando a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituída por múltiplos materiais e sujeita a qualquer tipo de carregamento.

O termo “elemento finito” é creditado a Ray Clough, em artigo datando de 1960. Parte das técnicas que se incorporaram ao método eram já conhecidas anteriormente, porém sem as características que possuem atualmente.

Com a proliferação de micro-computadores ocorrida no final da década de 80 e na década de 90, o MEF atingiu, definitivamente, a generalidade de ambientes de projeto.

## 4.1 Tipos de análise

Para a realização da análise de uma estrutura, questões como determinação da geometria, classificação dos materiais envolvidos, carregamentos aplicados e restrições impostas assumem o papel de nortear a elaboração de algoritmos que armazenem e vinculem adequadamente as informações a elas pertinentes.

As estruturas, em geral, estão sujeitas a carregamentos dinâmicos. No entanto, em muitas situações, é razoável considerar que as ações são aplicadas de

---

<sup>23</sup> Joseph Fourier (1768-1830) – Matemático francês.

um modo suficientemente lento, tornando desprezíveis as forças inerciais. Se tal simplificação é possível, o problema é dito estático.

Quando na análise de uma estrutura sólida, os deslocamentos provocados por forças externas são muito pequenos quando comparados às dimensões das componentes da estrutura, admite-se que não existe influência da modificação da geometria na distribuição dos esforços e das tensões. Os estudos são feitos, então, com base na configuração inicial indeformada. Caso contrário, a análise é designada não-linear geométrica.

Azevedo (2003) acrescenta, ainda, que é freqüente considerar ao nível do material que constitui a estrutura, se as relações entre tensões e deformações são ou não lineares. Nesses casos avalia-se a não-linearidade material.

Outra classificação importante diz respeito a geometria da estrutura. Os sólidos são o caso mais genérico, situação essa que se apresenta quando as características não permitam enquadrá-la como laminar ou reticulada. Laminares são aquelas que se desenvolvem para ambos os lados de uma superfície média, mantendo-se na sua vizinhança e sua espessura é muito inferior às dimensões restantes.

É possível, ainda, tratar classes de problemas designados axissimétricos (a estrutura é um sólido de revolução e as forças externas são todas axissimétricas em relação ao mesmo eixo) e estado plano de deformações (sólido cuja geometria e ações se repetem indefinidamente ao longo de um eixo retilíneo, permitindo a análise numa geometria bidimensional).

## **4.2 Fundamentos do MEF**

Segundo Sabonadière & Coulomb (1993), o MEF baseia-se numa formulação integral de um fenômeno analisado, derivado de uma forma diferencial que representa a equação a derivadas parciais e respectivas condições de contorno. Essa formulação pode ser do tipo variacional ou do tipo ponderado em associação com uma dada base de funções.

### 4.2.1 Método dos Resíduos Ponderados

O método dos resíduos ponderados consiste em tentar uma solução para um problema por meio da substituição de uma função original (para quaisquer variáveis)  $f(\bullet)$ , por uma função aproximada  $\tilde{f}(\bullet)$ , que atenda as mesmas condições de contorno.

Decorre da substituição proposta que  $R(\bullet)$  é um resíduo relativo a diferença entre a função  $f(\bullet)$  real e a função  $\tilde{f}(\bullet)$  proposta.

$$f = \tilde{f} + R \quad (4.1)$$

As funções  $\tilde{f}(\bullet)$  propostas podem ser expressas por:

$$\tilde{f}(\bullet) = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \cdots + \alpha_n \varphi_n \quad (4.2)$$

ou

$$\tilde{f}(\bullet) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(\bullet) \quad (4.3)$$

Os parâmetros  $\alpha_i$  devem ser determinados de maneira que o resíduo  $R(\bullet)$  seja nulo.

O mérito dessa troca proposta reside no fato de podermos ponderar essa expressão com uma função  $\xi(\bullet)$  e integrando-as no domínio obter-se o seguinte problema variacional: Encontrar  $\tilde{f}(\bullet)$  que satisfaça as condições de contorno e anule, no sentido da média, a expressão

$$\int_0^1 [R(x) \xi_i(x)] dx = 0 \quad (4.4)$$

Se o resíduo tender a zero, a solução numérica tende para solução analítica.

A função peso  $\xi(\bullet)$  deve ser suficientemente suave para que a integral exista e deve ser nula nos contornos que possuam valores impostos para a função  $f(\bullet)$ .

Em geral, a equação (4.4) representa um sistema de equações algébricas cuja solução fornece os valores dos parâmetros  $\alpha_i$ .

Do critério de escolha das funções peso é que depende a escolha do método dos resíduos ponderados, dentre eles, um de especial interesse, o Método de

Galerkin<sup>24</sup>, no qual a definição de sua função peso  $\xi(\bullet)$  é tomada a partir da própria função  $\varphi_i(\bullet)$  utilizada para definir a função aproximada  $\tilde{f}(\bullet)$ .

$$\xi_i(\bullet) = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j \quad (4.5)$$

#### 4.2.2 Formulação variacional

Baseia-se em uma equivalência, sob certas condições, entre a resolução de um problema diferencial de segunda ordem e a pesquisa de uma função que torna extremo um funcional associado àquela equação diferencial. A equação diferencial em questão é denominada equação de Euler<sup>25</sup> associada ao funcional cujo extremo se está pesquisando.

A formulação variacional é baseada nos seguintes aspectos matemáticos do cálculo variacional, demonstrados em Elsgoltz (1969):

- **LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO VARIACIONAL:** Se  $t_1$  e  $t_2 (> t_1)$  são constantes fixas e  $f(t)$  é uma função contínua particular para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , e

se  $\int_{t_1}^{t_2} [f(t)\xi(t)]dt = 0$  para toda escolha da função contínua  $\xi(t)$ , tal

que  $\xi(t) > 0$  e  $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$ , então  $f(t) = 0$ ,  $\forall t \in [t_1, t_2]$ .

- **VARIAÇÃO DE UMA INTEGRAL COM LIMITES FIXOS:** Seja  $\Phi(x, y, t)$ , uma função de 3 variáveis contínuas com derivadas primeiras contínuas. A função  $f(t)$  derivável e de derivada  $f'(t)$ , definida num intervalo  $(t_1, t_2)$  tal que  $f(t_1) = f_1$ ,  $f(t_2) = f_2$  e que torna extrema a integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(f, f', t)dt \quad , \text{ verifica a equação de Euler } \frac{\partial \Phi}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial f'} \right) = 0$$

associada a este funcional.

---

<sup>24</sup> Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945) – Matemático e engenheiro bielo-russo.



Pode-se, portanto, resolver a equação diferencial com suas condições de contorno ou minimizar a integral a ela associada.

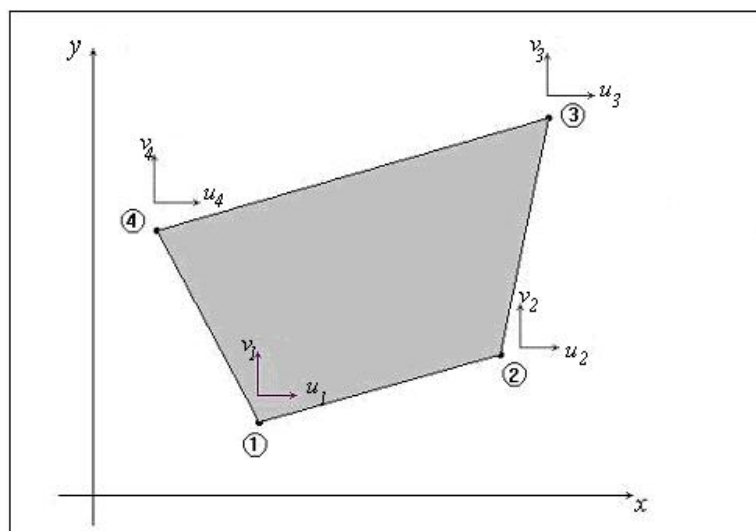
## 4.3 Elementos finitos bidimensionais

Em diversos problemas práticos, a formulação tridimensional pode ser substituída por abordagens bidimensionais, facilitando as simulações e reduzindo esforços computacionais. O presente trabalho baseou-se nessa possibilidade de análise bidimensional na simulação de um sistema dentário.

### 4.3.1 Estado plano de deformações

Seja um elemento finito quadrilateral de geometria arbitrária, destinado a discretização do estado plano de deformações (FIGURA 4.1).

FIGURA 4.1: ESQUEMA DE ELEMENTO QUADRILATERAL GENÉRICO



Adaptado de Azevedo (2003).

A formulação do estado plano de deformações coincide com a do estado plano de tensões, com a condição de considerar-se espessura unitária.

<sup>25</sup> Leonhard Euler (1707-1783) – Matemático suíço.

O problema recai na busca de solução de um sistema de equações do tipo  $K\vec{u} = \vec{f}$ , onde  $K$  é uma matriz que representa as rigidezes dos materiais,  $\vec{u}$  é o vetor deslocamentos e  $\vec{f}$  é o vetor de forças atuantes no sistema, e referem-se à totalidade dos graus de liberdade da estrutura. Resolvido o sistema, é possível calcular o estado de deformação e tensão em qualquer ponto de qualquer elemento.

### 4.3.2 Elementos triangulares

Segundo Sabonnadière & Coulomb (1993), elementos triangulares são, provavelmente, aqueles em maior número de estudos teóricos, pois se prestam bem à análise matemática e a simulação computacional de sistemas físicos.

No tocante a modelagem, porém, atenção especial deve ser dada a circunstância onde as direções cartesianas não são escolhas naturais para definição das funções de forma. De acordo com Zienkiewicz & Taylor (1988), um novo conjunto de coordenadas é, então, definido segundo uma relação linear entre esse novo conjunto e o sistema cartesiano

$$\begin{cases} x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \quad (4.6)$$

tal que a cada conjunto  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  corresponda um único conjunto de coordenadas cartesianas e no ponto 1,  $L_1 = 1$  e  $L_2 = L_3 = 0$ .

A solução de (4.6) leva a

$$\begin{cases} L_1 = \frac{a_1 + b_1x + c_1y}{2\Delta} \\ L_2 = \frac{a_2 + b_2x + c_2y}{2\Delta} \\ L_3 = \frac{a_3 + b_3x + c_3y}{2\Delta} \end{cases} \quad (4.7)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, & b_1 = y_2 - y_3, & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, & b_2 = y_3 - y_1, & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, & b_3 = y_1 - y_2, & c_3 = x_2 - x_1 \end{cases} \quad (4.9)$$

#### 4.3.2.1 Funções de forma

As características essenciais de uma função de forma são: assumir valor unitário em  $x = x_i$  e anular-se nos nós restantes. Sendo desejável, também, manter o grau do polinômio tão baixo quanto possível.

A expressão genérica para o caso unidimensional com  $n$  nós é dada pela fórmula de interpolação de Lagrange<sup>26</sup>

$$N_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad (4.10)$$

#### 4.3.2.2 Elementos triangulares de primeira ordem

Elementos triangulares de primeira ordem são aqueles possuidores de 3 nós, um para cada vértice, e cujas funções de forma, que vão compor os polinômios, são funções lineares definidas por

$$\begin{cases} N_1 = L_1 \\ N_2 = L_2 \\ N_3 = L_3 \end{cases} \quad (4.11)$$

---

<sup>26</sup> Joseph Louis Lagrange (1736-1813) – Matemático italiano.

Tais que assumem valor unitário em um nó e zero no outros. Para as demais regiões, a variação é linear.

O erro na utilização desse elemento é, usualmente, majorado por um termo proporcional  $1/\theta$ , onde  $1$  é a maior dimensão do elemento e  $\theta$  é o maior ângulo interno do elemento triangular. Assim, é comum buscar-se trabalhar com triângulos mais próximos do triângulo equilátero, pois isso implicará em uma minimização do erro na simulação.

#### 4.3.2.3 Elementos triangulares quadráticos

Além das propriedades dos elementos triangulares, possuem um grau de precisão suplementar que permite realizar discretizações que não necessitam de refinamento elevado, como nos elementos de primeira ordem.

A representação do elemento é dada por 6 nós, um em cada vértice e um intermediário para cada lado do triângulo e suas funções de forma são expressas por

$$\begin{cases} N_1(u, v) = (2L_1 - 1)L_1 \\ N_2(u, v) = (2L_2 - 1)L_2 \\ N_3(u, v) = (2L_3 - 1)L_3 \\ N_4(u, v) = 4L_1L_2 \\ N_5(u, v) = 4L_2L_3 \\ N_6(u, v) = 4L_3L_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

## 4.4 Exemplos de elementos da biblioteca ANSYS

O software comercial ANSYS é um programa de simulação computacional utilizando o Método dos Elementos Finitos e tem sido amplamente utilizado em na resolução de problemas típicos das engenharias e tem permitido investigações em áreas de conhecimentos outrora restritas a laboratórios de bioengenharia.

Contando com uma interface amigável para utilização pelo usuário, permite a criação ou importação de geometrias diversas, compatibilidades com ambientes CAD, manipulação facilitada das componentes das figuras, amplo banco de elementos para a composição das figuras englobando um amplo campo de formulações matemáticas, análises estáticas ou dinâmicas, tratamento de não-linearidades, liberdade na escolha dos métodos e determinação de parâmetros.

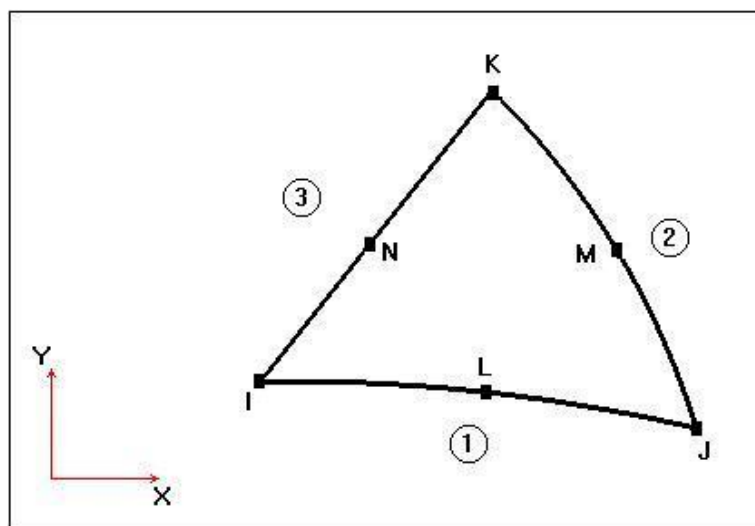
Na fase de pós-processamento o aplicativo apresenta variedade de opções para apresentação de resultados tanto numéricos quanto gráficos, englobando diversas necessidades da análise, contribuindo, assim, para a sua popularidade.

O presente trabalho foi elaborado levando-se em conta a utilização de três elementos da biblioteca do aplicativo ANSYS versão 7.0 e destaca-se, a seguir, um resumo das propriedades desses elementos.

#### 4.4.1 Elemento plano triangular PLANE2

PLANE2 é um elemento triangular plano de 6 nós (FIGURA 4.2). O elemento tem um deslocamento quadrático e é adequado para modelar malhas irregulares.

FIGURA 4.2: ELEMENTO PLANE2



Adaptado de ANSYS User's Manual v 7.0.

O elemento é definido por 6 nós, tendo 2 graus de liberdade cada nó: translações nodais nas direções  $x$  e  $y$ . Pode-se utilizar PLANE2 em análises do

estado plano de tensões (com ou sem definição de espessura), estado plano de deformações e axissimétrico.

Pressões podem ser atribuídas como cargas superficiais nas faces dos elementos, indicadas pelos números envolvidos por círculos, conforme disposto na figura 4.2. Pressões positivas agem internamente ao elemento. Cargas de corpo como temperatura e fluência também são permitidas para o elemento PLANE2.

As direções das tensões são paralelas ao sistema de coordenadas do elemento. Tensões superficiais estão disponíveis em qualquer face que tenha especificação de pressão diferente de zero. Essas tensões são definidas paralelas e perpendicularmente à face em questão, e ao longo do eixo  $z$  para a análise plana ou na direção do arco para a análise axissimétrica.

A área do elemento deve ser positiva. O plano do elemento deve ser o plano  $xy$ , como mostrado na figura acima, e o eixo  $y$  deve ser o eixo de simetria para análises axissimétricas. As estruturas axissimétricas devem ser montadas no quadrante  $+x$ .

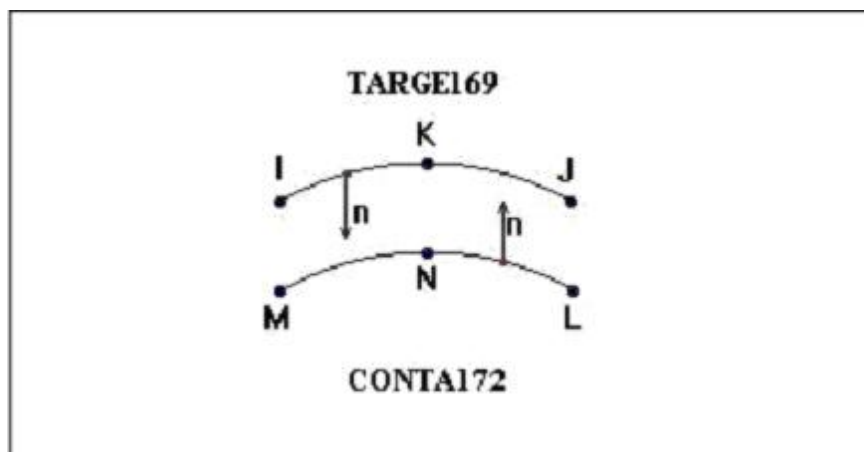
Uma face que tenha o nó médio removido implica que os deslocamentos variam linearmente, ao invés do deslocamento parabolóide ao longo da face.

#### **4.4.2 Elementos de contato**

Dos elementos constantes da biblioteca do ANSYS, destacam-se, por necessidade de correspondência com o problema bidimensional, os elementos TARGE169 (usado para representar várias superfícies 2-D associadas a elementos de contato) CONTA172 (revestem elementos sólidos descrevendo o contorno de corpos deformáveis e que estão potencialmente em contato com superfícies consideradas alvo). Todos esses elementos são definidos no plano  $xy$ .

A superfície alvo TARGE169 é discretizada por um conjunto de segmentos do tipo alvo e associada a uma superfície de contato CONTA172, compartilhando as constantes reais que representam suas propriedades físicas.

FIGURA 4.3: ELEMENTOS TARGE169 E CONTA172, FORMATO PARABÓLICO



Adaptado de ANSYS User's Manual v 7.0.

#### 4.4.2.1 TARGE169

O elemento alvo TARGE169 aceita translação ou rotação, temperatura e voltagem. O elemento aceita, também, imposição de forças e momentos.

A superfície alvo é modelada por meio de um conjunto de segmentos de alvo. Tal superfície pode ser rígida ou deformável. Porém, para simulações de contatos rígido-flexíveis, a superfície rígida deverá ser escolhida como superfície alvo.

Cada superfície alvo pode ser associada com somente uma superfície de contato e vice-versa. Entretanto, diversos elementos de contato podem recobrir uma superfície de contato e estabelecer relação com uma mesma superfície alvo. Analogamente, diversos elementos de alvo podem recobrir uma superfície alvo e estabelecer contato com uma mesma superfície de contato.

Se uma superfície de contato deve estabelecer contato com mais de uma superfície alvo, deve-se definir uma duplicação para a superfície de contato tal que compartilhem a mesma geometria, porém relacionadas a alvos separados.

A ordenação dos nós dos elementos de contato é de importância crucial para a interpretação do programa como superfícies válidas de contato. Os elementos de contato devem ficar localizados a direita da superfície alvo quando movimentando-se do nó alvo  $I$  para o nó alvo  $J$ .

Cada segmento da superfície alvo é um elemento de alvo com um formato específico. Apesar da biblioteca do ANSYS contar com seis tipos de segmentos:

linha reta, arco (sentido horário), arco (sentido anti-horário), parábola, círculo e nó piloto, disponíveis em um comando denominado TSHAP; apenas três desses serão de interesse no presente trabalho (TABELA 4.1).

TABELA 4.1: TIPOS DE SEGMENTOS TARGE169 E GRAUS DE LIBERDADE.

<b>TSHAP</b>	<b>TIPO SEGMENTO</b>	<b>NÓ 1 (DOF)</b>	<b>NÓ 2 (DOF)</b>	<b>NÓ 3 (DOF)</b>
LINE	Linha reta	1º. extremo (UX,UY)	2º. extremo (UX,UY)	-
PARA	Parábola	1º. extremo (UX,UY)	2º. extremo (UX,UY)	Ponto médio (UX,UY)
PILO	Nó piloto	(UX,UY)	-	-

Adaptado de ANSYS User's Manual v 7.0.

O nó piloto, ao contrário de outros segmentos, é usado para definir os graus de liberdade para a superfície alvo inteira. Como provê um meio conveniente para assinalar condições de contorno como rotação, translação, momentos, temperatura e voltagem em uma superfície alvo inteira, assinalando-as apenas para o nó piloto, elimina-se a necessidade de impor condições individualmente aos nós, reduzindo, assim, as chances de erro.

Para superfícies deformáveis, utiliza-se, normalmente, o comando ESURF para recobrir de elementos alvo nos contornos da malha existente. Nesse caso, não se deve usar o comando TSHAP.

Para superfícies rígidas, nenhuma força externa pode ser aplicada aos nós alvo exceto no nó piloto. Se o nó piloto for especificado para uma superfície alvo, o ANSYS ignorará as condições de contorno para os nós restantes. Para cada nó piloto será definido um nó interno e uma equação de vínculo interna. A rotação do nó piloto está conectada à translação do nó interno por meio da equação de vínculo.

#### 4.4.2.2 CONTA172

O elemento de contato CONTA172 comporta dois graus de liberdade em cada nó: translação nodais nas direções  $x$  e  $y$ . O elemento é utilizado nas superfícies 2-



D, e conta com a utilização de nós médios (FIGURA 4.3) e tem como característica a possibilidade de impor-se atritos de Coulomb e tensões cisalhantes.

O elemento é definido por 3 nós, assim como o elemento sólido adjacente. O eixo  $-x$  do elemento é localizado ao longo da linha  $L - M$  do mesmo.

A ordenação dos nós do elemento de contato é crítica para a detecção apropriada do contato, os mesmos devem estar ordenados de tal forma que a superfície alvo esteja a direita do contato quando o movimento for do primeiro nó do elemento de contato para o segundo.

Por tratar-se de elementos com tratamento não-linear, é requerida uma solução iterativa do método de Newton, independente de tratar-se de grandes ou pequenos deslocamentos.

O elemento suporta vários estados de tensão bidimensionais. Tal estado é automaticamente assumido como sendo igual ao da superfície adjacente ao elemento adjacente.

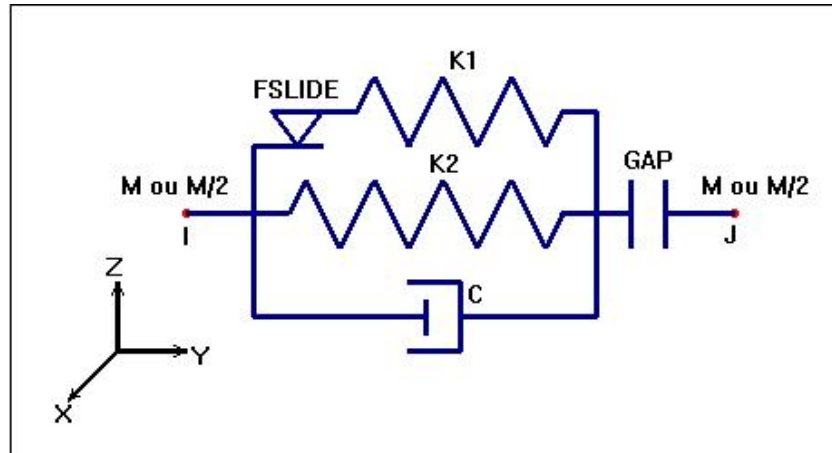
#### 4.4.3 Elemento de mola COMBIN40

O elemento COMBIN40 é uma combinação de dois nós, duas molas (uma com possibilidade de deslizamento) e um pistão amortecedor, em paralelo, acoplados a uma abertura em série (FIGURA 4.4).

Dentre as propriedades do elemento, constam a possibilidade de associar-se um valor de massa aos pontos nodais, individual ou conjuntamente. O elemento possui um grau de liberdade para cada nó.

Quaisquer das componentes: massa, mola, deslizante, amortecedor e abertura podem ser removidas do elemento, bastando atribuir-se valor igual a zero para a propriedade, tal que o elemento possa ser usado em qualquer análise.

FIGURA 4.4: ELEMENTO COMBIN40



Adaptado de ANSYS User's Manual v 7.0.

Como o elemento trabalha com duas molas, há possibilidade de se impor valores independentes para as constantes de mola  $k1$  e  $k2$ , onde  $k$ , uma constante generalizada,  $\vec{f}$  uma força e  $\vec{u}$  um deslocamento, podem ser relacionados segundo a expressão:

$$\vec{f} = k\vec{u} \quad (4.13)$$

A medida de abertura, denominada  $GAP$ , é obtida segundo um comprimento desse espaço. Se a medida do  $GAP$  é positiva, então a lacuna existe. Se a medida for negativa, tem-se uma interferência inicial (interpenetração).

A força limite de deslizamento,  $FSLIDE$ , representa o valor absoluto que a força da mola tem de alcançar para que o deslizamento ocorra e é especificada segundo a seguinte expressão de força:

$$FSLIDE = \mu \vec{f}_N \quad (4.14)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito de Coulomb<sup>27</sup> e  $\vec{f}_N$  é a componente normal da força atuante sobre o corpo. Se a capacidade  $FSLIDE$  é removida, então uma conexão rígida é assumida.

O comportamento do COMBIN40 pode ser descrito segundo as atribuições que sejam feitas as componentes do elemento. Para a situação de ausência de amortecimento, tem-se que, se o  $GAP$  inicial é zero, então o elemento responde como um conjunto mola-amortecedor-deslizante, tendo as capacidades de tensão e

<sup>27</sup> Charles August Coulomb (1763-1806) – Físico francês.

compressão. Se o  $GAP$  é diferente de zero, então quando a força nas molas  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$  é negativa (compressão), o  $GAP$  permanece fechado e o elemento responde como um conjunto mola-amortecedor em paralelo. Quando o valor da força  $f_1$  cresce além do valor de  $FSLIDE$ , o elemento desliza e a rigidez tende para zero. O elemento move-se sem resistência à força  $\vec{f}_1$ . Se a força torna-se positiva (tensão), o  $GAP$  abre-se e nenhuma força é transmitida.

As direções dos deslocamentos correspondem as direções das coordenadas nodais. O deslocamento da mola é observado ao fim de cada passo, e denominado  $STR$ , tal que

$$STR = u_j - u_i + GAP - SLIDE \quad (4.15)$$

e é usado para a determinação da força na mola.

O valor de deslizamento  $SLIDE$  é o acumulado de deslizamento ao fim de cada passo.

Um parâmetro  $STAT$  descreve o status do elemento ao fim de cada passo para uso no passo seguinte. Se  $STAT = 1$ , o  $GAP$  está fechado e não ocorre deslizamento. Se  $STAT = 3$ , o  $GAP$  está aberto.  $STAT = +2$  indica que o nó  $j$  move-se para a direita do nó  $i$ .  $STAT = -2$  indica deslizamento negativo.

O elemento COMBIN40 não prevê alteração das constantes reais de seus valores iniciais. Há opções de análise não-linear caso os valores de  $GAP$  e  $FSLIDE$  não sejam, ambos, iguais a zero. Nessa situação, uma solução iterativa é requerida.

Valores altos de rigidez devem ser evitados. A taxa de convergência pode decrescer se a rigidez cresce. Se  $FSLIDE$  é diferente de zero, o elemento é não-conservativo assim como não-linear. Elementos não-conservativos requerem que as cargas sejam aplicadas muito gradualmente.

#### 4.4.3.1 Matrizes elementares associadas ao COMBIN40:

➤ **Matriz elementar de rigidez:**

$$[K_e] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\text{onde } k = \begin{cases} K_1 + K_2 & \text{sem deslizamento na iteração anterior} \\ K_2 & \text{com deslizamento na iteração anterior} \end{cases}$$

➤ **Vetor de carga elementar (Newton-Raphson):**

$$\{\vec{f}_e^{nr}\} = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

**4.4.3.2 Determinação de  $\vec{f}_1$  e  $\vec{f}_2$ :**

➤ **Se o GAP está aberto:**

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0 \quad (4.18)$$

Se não há deslizamento,  $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = 0$ .

Entretanto, se há deslizamento durante movimentos unidirecionais,

$$\vec{f}_1 = \frac{u_s K_1 K_2}{K_1 + K_2} \quad (4.19)$$

e,

$$\vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \quad (4.20)$$

onde

$$u_s = \text{deslizamento acumulado} = \text{SLIDE}$$

➤ **GAP fechado e com deslizamento:**

$$\vec{f}_1 = \pm \vec{f}_s \quad (4.21)$$

e

$$\vec{f}_2 = K_2 u_2 \quad (4.22)$$

onde

$$u_2 = u_J - u_I + u_{GAP} = \text{STR2} \quad (4.23)$$

➤ **GAP fechado e sem deslizamento:**

$$\vec{f}_1 = K_1 u_1 \quad (4.24)$$

e

$$\vec{f}_2 = K_2 u_2 \quad (4.25)$$

onde

$$u_1 = u_2 - u_s = STR1 \quad (4.26)$$

As descrições acima envolvem apenas análises estruturais.

## Capítulo 5

### Simulações

#### 5.1 Geometria das estruturas

O modelo em estudo corresponde a um dente incisivo central superior, em corte vestibulo lingual, estando presentes os tecidos periodontais adjacentes. As diversas componentes do modelo foram obtidas junto ao endereço da rede mundial de computadores <http://www.fosjc.unesp.br/periodontia/Main-menu1.htm> e corrigidas a partir de imagens radiográficas periapicais conseguidas junto ao Setor de Radiologia do Departamento de Odontologia da Universidade Federal do Paraná.

As componentes dentárias e estruturas de suporte foram retificadas com auxílio do programa AutoCAD (autodesk, USA), versão R14, tendo gerado, então, imagens para conversão em arquivo IGES (*Initial Graphics Exchange Specification*) com o auxílio do software AutoDeskDesignAssistant8 (*Informative Graphics*) versão 2.11 e posteriormente exportado para o programa ANSYS® versão 7.0. Tais imagens foram comparadas ao disposto na literatura, mais especificamente Wheeler (1974), Della Serra e Ferreira (1981), Lascale & Moussalli (1995), Cimini *et al.* (2000), Provatidis (2000), Provatidis (2001a) e Albuquerque *et al.* (2003), guardando relação de forma e dimensões segundo os contornos e espessuras dos tecidos envolvidos.

FIGURA 5.1: MODELO DENTÁRIO INICIAL



### 5.1.1. Dente

Para a simulação computacional, foi considerado um dente incisivo central superior, utilizando-se dimensionamento compatível com os valores apresentados na tabela 5.1, reproduzida de Della Serra & Ferreira, 1981 e Figun & Garino, 1994.

TABELA 5.1: DIMENSÃO MÉDIA, mm, INCISIVO CENTRAL SUPERIOR

<b>Autor</b>	<b>Comp. total</b>	<b>Comp. raiz</b>	<b>Altura coroa</b>	<b>Dim.MD coroa</b>	<b>Dim.MD colo</b>	<b>Dim.VL coroa</b>	<b>Dim. VL colo</b>
Aprile-Figun	22,5	12,5	10,0	9,0	-	7,0	-
Black	22,0	12,0	10,0	9,0	6,3	7,0	-
Bouland-Lebourg	22,0	12,0	10,0	9,0	-	7,0	-
Diamond	28,0	16,0	12,0	10,0	7,0	8,0	7,0
Broomel-Fischelis	22,35	12,44	9,9	-	-	-	-
Dieulafé-Herpin	21,0	11,0	10,0	-	7,0	7,0	7,0
Marseillier	22,5	12,5	10,0	8,8	6,4	7,0	6,0
Mühlreiter	24,0	12,4	11,6	8,4	-	-	-
Sauvez <i>et al.</i>	22,0	12,0	10,0	-	6,3	7,0	-
Sicher-Tandler	24,0	12,4	11,6	8,4	-	7,3	-
Wheeler	23,5	13,0	10,5	8,5	7,0	7,0	6,0

Fontes: Della Serra, O. e Ferreira, F. V., 1981 e Figun & Garino, 1994.

A região correspondente à coroa dentária foi simulada segundo informações constantes da tabela 5.1, tendo em vista a imagem original estar desprovida do

tecido e considerando que as abreviaturas MD e VL, correspondem as expressões mésio-distal e vestíbulo-lingual, respectivamente.

O modelo dentário, portanto, foi constituído com as seguintes medidas constantes da tabela 5.2:

TABELA 5.2: DIMENSÕES DO DENTE EM ESTUDO

Simulação	Comp. total	Comp. raiz	Altura coroa	Dim.MD coroa	Dim.MD colo	Dim.VL coroa	Dim. VL colo
ANSYS	23,4	12,9	10,5	-	-	7,7	6,4

Apesar de artigos como Rees & Jacobsen (1997), Provatidis (2000), Provatidis (2001a) e Yoshida *et al.* (2001) simularem o dente não considerando o tecido pulpar, optou-se pela manutenção desse tecido visto que, pelo menos, a manutenção da cavidade pulpar já havia sido sugerida como importante na simulação computacional de dentes (DARENDELILER, S.; DARENDELILER, H. & KINOGLU, 1992 e TRESHER & SAITO, 1973, citados por LAS CASAS *et al.*, 1999).

As demais componentes dentárias obedeceram às proporções coletadas nas diversas referenciais e organizadas segundo a tabela 5.3, inclusive para facilitar a consulta das propriedades dos materiais envolvidos. A falta de informações sobre alguns tecidos, como mostrado na referida tabela, implicou na ausência de parâmetros para simulação, bem como no julgamento das conseqüências que os percentuais de materiais representam na composição dos tecidos.

TABELA 5.3: COMPOSIÇÃO E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS

TECIDO	COMPOSIÇÃO %			ESPESSURA mm	EY (Gpa)	ν
	Sais Inorgânicos	Sais Orgânicos	Água			
ESMALTE	95 92 (2)	1 2 (2)	4 6 (2)	2 a 3	48 (1) 41 (3)	0,30 (3)
DENTINA	70 47 (2)	20 30 (2)	10 23 (2)	0,8 a 2,2	18,6 (3)	0,31 (3)
POLPA					0,002 (3)	0,45 (3)
CEMENTO	61	27	12	1,5E-01 a 2,0E-01 (4)	14*	0,31*
LIGAMENTO PERIODONTAL				0,25±50% (5)	0,003 (1)	0,45 (1)
OSSO ALVEOLAR	45	30	25	1,0 (6)	13,7 (1),(3)	0,30 (1),(3)



OSSO CORTICAL*	45	30	25	1,0 (6)	13,7 (1),(3)	0,30 (1),(3)
OSSO ESPONJOSO					1,37 (1),(3)	0,30 (1),(3)
GENGIVA					0,003*	0,45*
MATERIAL AUXILIAR**				0,25±50%**	0,000001**	0,45**

\* Valores sem especificação na literatura assumidos por semelhança de propriedades. \*\* O material denominado MATERIAL AUXILIAR será abordado nas seções sobre simulação com elementos de mola e contato. As referências numéricas correspondem a (1) Schroeder, (2) Las Casas, (3) Albuquerque, (4) Carranza, (5) Lindhe e (6) Lascala.

## 5.1.2. Periodonto

Para a imagem do ligamento periodontal, foi adotada espessura variável e compatível com os valores constantes da tabela 5.3. Tais medidas variam ao longo do contorno da raiz dentária, mantendo-se segundo o disposto de 0,25 mm  $\pm$ 50% (LINDHE, 1992.).

As simulações do cimento e do osso alveolar obedeceram ao mesmo critério seguido para a simulação do ligamento periodontal. O osso cortical foi considerado contínuo com o osso alveolar (LINDHE, 1992)

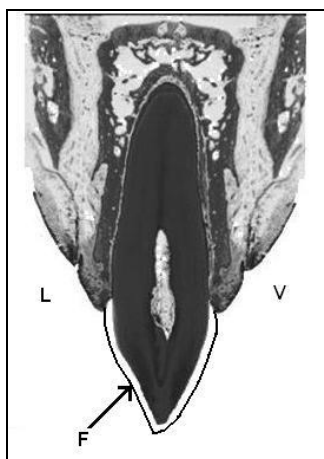
O osso esponjoso foi mantido na proporção da imagem guardando relação com o disposto nos artigos de Provatidis (2000), Provatidis (2001a), Yoshida *et al.* (2001), Li *et al.* (2003), Gei, Genna e Bigoni (2003) e Albuquerque *et al.* (2003).

O tecido gengival foi retirado nas simulações, tornando sua identificação visual mais imediata àquela dos artigos de referência e considerando a não influência nos resultados apontados no ligamento periodontal, foco do presente trabalho.

Muito embora um estudo completo devesse basear-se em simulações tridimensionais, o presente trabalho tratou o problema com a consideração de uma simulação computacional bidimensional, pois, apesar de simplificado, apresenta as informações relevantes suficientes a respeito do estado de tensões a que o corpo está submetido (VOSGERAU, 2002). Optou-se por utilizar o modelo do estado plano de deformações, mantendo-se, assim, a idéia assentada nas propostas de Albuquerque *et al.* (2003), onde se entende que a carga funcional é aplicada

paralela ao próprio plano que contém o corte dentário (FIGURA 5.2) e a seção transversal do dente é considerada relativamente constante a longo de seu eixo normal.

FIGURA 5.2: APLICAÇÃO DA FORÇA NO PLANO DE CORTE VESTÍBULO-LINGUAL



## 5.2 Simulação computacional

Em virtude do presente trabalho se tratar da avaliação de tensões em um dente, o que é reconhecido como um ambiente de ensaios restritos, tanto *in vivo* quanto *in vitro*, seja pela baixa resistência a dor e desconforto no primeiro caso, seja pela alteração experimentada pelo organismo inanimado no segundo, o mesmo foi percebido como pertinente ao Programa de Métodos Numéricos, passível de enquadramento em uma abordagem computacional que permitisse a simulação do modelo físico, bem como dos respectivos ensaios de forças.

O método utilizado foi o Método dos Elementos Finitos (MEF), viabilizado por meio do aplicativo ANSYS®, versão 7.0, desenvolvido pela Swanson Analysis Inc., com auxílio de um computador Pentium IV de 2800 MHz, com 512 MB de memória e 40 GB de disco rígido, de propriedade do CESEC (Centro de Estudos de Engenharia Civil Inaldo Ayres Vieira) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

A recriação dos diversos tecidos envolvidos, cada um com parâmetros próprios de caracterização do material, foi estabelecida com elementos do tipo triangulares quadráticos (PLANE2). Tais elementos são definidos por seis nós, com

dois graus de liberdade em cada nó, que são translações nas direções X e Y, conforme exposto no capítulo 4

Como o foco do presente trabalho é a identificação de formulações matemáticas que postulem de maneira adequada o comportamento do ligamento periodontal, esse tecido foi alvo de experimentação numérica visando sempre o melhor aproveitamento do modelo para a recriação física adequada à situação de funcionamento do tecido.

Especificamente para a simulação computacional do comportamento do ligamento periodontal, três diferentes abordagens (e respectivos modelos matemáticos) foram consideradas:

1. **Elemento de estado plano:** com o uso do próprio PLANE2, simulando o ligamento como um meio contínuo entre o osso cortical e o cimento dentário;
2. **Elemento de contato:** utilizando TARGE169 e CONTA172, onde a presença do ligamento atua como uma interface que viabiliza maior ou menor contato entre as superfícies periféricas do cimento e do osso cortical;
3. **Elemento de mola:** COMBIN40, uma interface que recria o ambiente de mola, inclusive permitindo deslizamento de uma superfície sobre a outra.

A recriação do modelo no aplicativo ANSYS demandou um tratamento manual para a correção dos contornos, haja vista que o processo de geração de imagens não é de completa compatibilidade.

O escopo das avaliações deu-se segundo o seguinte roteiro:

1. Aquisição da imagem;
2. Tratamento da imagem;
3. Geração de arquivos compatíveis;
4. Exportação de arquivos para o ANSYS;
5. Ajuste do modelo;
6. Avaliação do modelo comparativamente às condições dos ensaios conhecidos por meio de artigos;
7. Avaliação do problema considerando PLANE2 como ligamento periodontal;
8. Reavaliação do problema considerando COMBIN40 como ligamento periodontal;
9. Reavaliação do problema considerando TARGE169 e CONTA172 como ligamento periodontal;
10. Avaliação da estabilidade dos modelos (refinamento, convergência);

11. Consideração de proposições matemáticas específicas para o módulo de elasticidade do ligamento periodontal (consideração de iteratividade, com abastecimento manual em cada passo de carga);

12. Extensão dos resultados;

As avaliações das tensões consideradas variaram entre a comparação direta de tensões, deformações e deslocamentos impostos, na direção vertical ( $y$ ), a fim de manter correlação com os artigos usados como referência.

Segundo Albuquerque *et al.* (2003), a direção  $y$  foi escolhida por ser a de maior contribuição para a tensão equivalente de Von Mises e pela correlação do presente problema com ensaios de viga em balanço.

Para as comparações entre as interfaces propostas nos passos 7, 8 e 9 do escopo, foram utilizados, além das tensões e deformações em  $y$ , o conceito de tensões de Von Mises, esboço das configurações deformadas e indeformadas, bem como detalhes das simulações computacionais específicos para cada tipo de elemento.

O critério de Mises foi escolhido por relacionar conceitos de deformação do corpo mas invariância no volume, interessando, então, a condição de identificar como regime elástico a situação onde tensão equivalente é menor que a tensão de escoamento do material ( $\sigma_{eqv} \leq \sigma_Y$ ). Von Mises propôs que a falha tem lugar quando o segundo invariante das tensões de desvio excede um determinado valor crítico do material (vide seção 3.4.19).

O aplicativo ANSYS foi escolhido pela versatilidade, facilidade operacional e de análise, alta aceitação como ambiente de simulação em engenharias e compatibilidade com outros aplicativos e sistemas disponíveis nas mesmas plataformas em uso.

Como exemplo de facilidade operacional e de análise pode-se citar que para a substituição de uma interface por outra, basicamente, não se precisa alterar o modelo, apenas a interface em questão. Cada componente dentária é separada por áreas e identificado por cores diferenciadas. Quanto à análise, todas as avaliações são disponíveis em relatórios, gráficos com espectro de cores, gráficos de vetores para acompanhamento de tensões principais, animação, entre outras.

### 5.2.1 Aquisição da Imagem

A imagem original para trabalho foi obtida junto ao endereço da rede internacional de computadores <http://www.fosjc.unesp.br/periodontia/Main-menu1.htm> (FIGURA 5.1), para a qual, de imediato, identificou-se a necessidade de ajuste nas dimensões e recriação do tecido relativo ao esmalte dentário.

### 5.2.2 Tratamento da Imagem

O processo de recriação baseou-se em imagens radiográficas obtidas junto ao Setor de Radiologia do Departamento de Odontologia da Universidade Federal do Paraná e tratamento de imagens (inversões de fundo como negativo, ampliações e reduções e escalas de cinza) com softwares de manipulação como AutoCAD (FIGURA 5.2).

### 5.2.3 Geração de arquivos compatíveis

A imagem gerada no aplicativo AutoCAD foi transferida para o aplicativo AutoDeskDesignAssistant8 (*Informative Graphics*) versão 2.11 que possibilitou a geração e manipulação de uma nova imagem como arquivo IGES (*Initial Graphics Exchange Specification*) que é um padrão para migração para o aplicativo ANSYS que procederá a análise. Além disso, foi estabelecida uma adequação nas medidas do desenho em conformidade com a tabela 5.1, tendo gerado as dimensões disponibilizadas na tabela 5.2.

### 5.2.4 Exportação de arquivos para o ANSYS

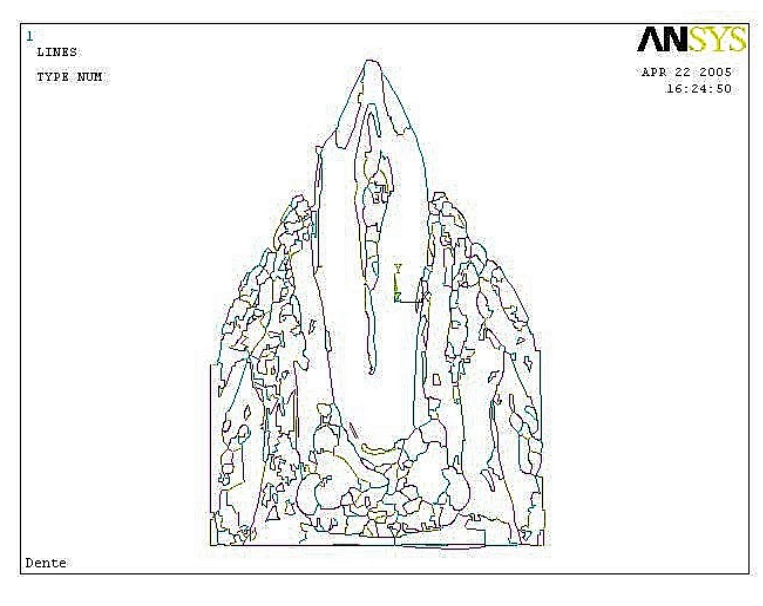
O arquivo IGES foi importado pelo ANSYS, assumindo o formato de linhas com alto grau de irregularidade, mas, ainda assim, preferível a um modelo

idealizado, de linhas muito suaves, porém não condizentes com a realidade do formato dos tecidos envolvidos (FIGURA 5.3).

O modelo importado, conquanto necessitasse de ajustes, permitiu trabalhar a partir de uma geometria com muitas irregularidades, porém muito relacionada com o aspecto de naturalidade dos tecidos envolvidos.

É perceptível, mesmo dentro do excesso de linhas apresentadas na figura 5.3, que os contornos dos diversos tecidos foram esboçados. Desse esboço procedeu-se ao ajuste do modelo.

FIGURA 5.3: ARQUIVO IGES PARA TRATAMENTO PELO ANSYS

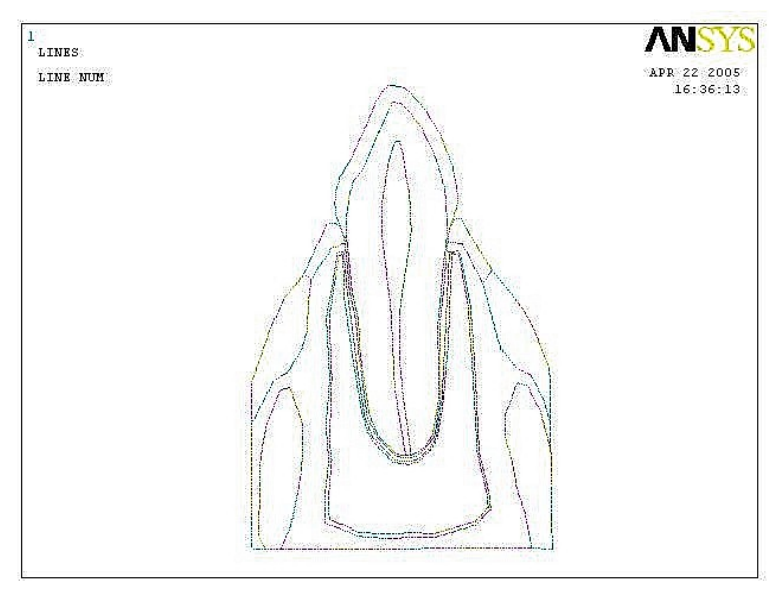


### 5.2.5 Ajuste do modelo

O ajuste proposto baseou-se na recriação das áreas identificadas segundo a figura 5.1, confrontando-as com o disposto na literatura. A criação e supressão de pontos, linhas e áreas visaram à geração de imagens suficientemente suaves para tornar viável o manuseio pelo MEF, não descuidando do fato de que os dentes divergem de indivíduo para indivíduo e que dentre mais de 6 bilhões de indivíduos sobre o planeta, o modelo proposto seria razoavelmente aceito como a caracterização do dente de um desses muitos indivíduos (FIGURA 5.4).

Apesar de constarem dos artigos modelos com geometrias suaves, optou-se pela manutenção das irregularidades das linhas, tanto quanto possível, sem comprometer o desempenho da simulação computacional, mas de identificação mais imediata com um modelo real.

FIGURA 5.4: MODELO AJUSTADO PARA TRABALHO NO ANSYS

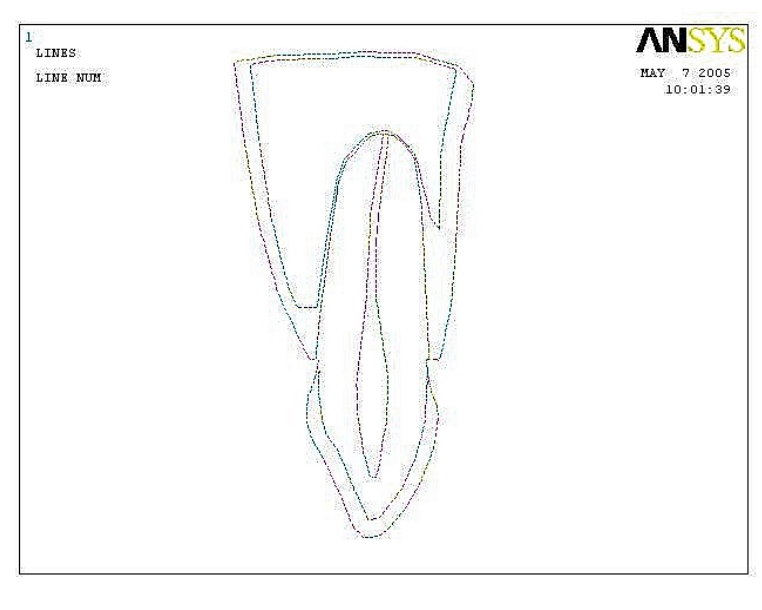


### 5.2.6 Avaliação do modelo

A avaliação da presente seção indica que o modelo foi tratado de modo a verificar a possibilidade de obtenção de resultados condizentes com os experimentos realizados naqueles artigos onde havia suficiência de informações para tal, haja vista que o presente trabalho não contou com ensaios laboratoriais.

O processo deu-se em duas etapas: a primeira consistindo na manipulação da imagem adquirida a fim de aproximá-la daquela do modelo ensaiado no artigo de referência; o segundo, a avaliação de modelos mais próximos do original adquirido, ou seja, com um número reduzido de interferências e observação do impacto dessa mínima interferência nos resultados obtidos.

FIGURA 5.5: MODELO PARA AVALIAÇÃO



O modelo foi calibrado segundo Albuquerque *et al.* (2003). Os resultados da simulação foram estendidos para Provatidis (2000), Provatidis (2001a) e Yoshida *et al.* (2001), por serem os autores cujos artigos permitiram melhor identificação com o modelo.

A primeira etapa de avaliação contou com a retirada do tecido conjuntivo da gengiva, alongamento do osso esponjoso na direção lingual (FIGURA 5.5). O cimento e o ligamento periodontal foram tratados como continuação da dentina. Houve espessamento do osso cortical em relação ao desenho original. Saliente-se, ainda, que não há suficiência de informações que permitam uma recriação total do modelo sugerido no artigo de referência, exceção feita à dimensão do canal pulpar de 12,0 mm.

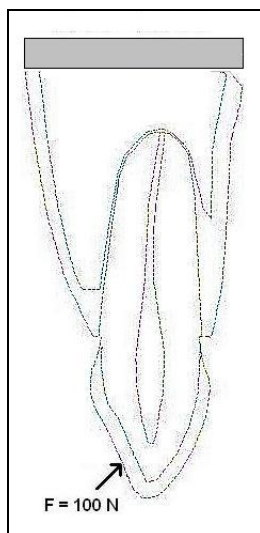
O modelo foi considerado composto de estruturas homogêneas, lineares, elásticas e isotrópicas. Além disso, há um perfeito acoplamento entre os demais tecidos de modo que se pode enxergá-los como dois grandes blocos: dente e periodonto.

A fim de recriar o ambiente do artigo de Albuquerque *et al.* (2003), determinou-se uma carga de 100 N, aplicado a 45° do eixo do dente. As restrições aos deslocamentos estão impostas na porção do osso em direção as fossas nasais (FIGURA 5.6), o elemento utilizado para a geração da malha foi o quadrilateral



denominado PLANE42 (biblioteca do ANSYS) e a avaliação de tensões está baseada na tensões verticais ( $\sigma_y$ ).

FIGURA 5.6: MODELO COM RESTRIÇÃO IMPOSTA E CARGA APLICADA



Os modelos computacionais para a primeira etapa de avaliação foram denominados ALBX, onde X indica a numeração seqüencial das malhas geradas com diferença apenas no número de elementos (TABELA 5.4). Os valores tabelados referem-se a tensões na direção  $y$  avaliadas em duas regiões: A) cervical e na direção palatal; (B) coronal, próxima ao tecido pulpar. Tais regiões encontram-se detalhadas na figura 5.8 e valeram para todas as demais simulações.

TABELA 5.4: AVALIAÇÃO DO MODELO

MODELOS (nr. Elementos)	REGIÃO A $\sigma_y$ (MPa)	Nó	REGIÃO B $\sigma_y$ (MPa)	Nó
<b>ARTIGO (1509)</b>	<b>293,00</b>		<b>-42,80</b>	
ALB (1206)	149,79	23	-43,93	292
diferença	48,88%		2,64%	
ALB1 (1622)	168,17	23	-44,31	351/352
diferença	42,60%		3,53%	
ALB2 (2209)	175,78	23	-45,42	1148/1149
diferença	40,00%		6,12%	

ALB3 (3193)	176,58	23	-46,09	437/438
diferença	39,73%		7,69%	
ALB4 (12690)	236,30	23	-46,99	444/3666
diferença	19,35%		9,79%	

Os valores do artigo de referência foram citados por regiões e não para nós específicos, o que gerou apenas uma expectativa de obtenção daqueles valores. Para os ensaios e comparações, o foco recaiu sobre a localização do ponto avaliado e não a numeração do nó, o que poderia variar em cada malha.

O modelo denominado ALB4 (FIGURAs 5.7, 5.8 e 5.9) foi avaliado como razoável posto que, apesar de todas as diferenças na geração dos modelos e o proposto pelo artigo, a diferença entre as simulações é da ordem de 19,35% para tração e 9,79% para compressão. Além disso, verificou-se que a tentativa de refino a partir do ALB4, não conduziu para variações favoráveis nos resultados, inclusive salientando a dificuldade natural que o elemento quadrangular apresenta na conformação de modelos com áreas de pequenas dimensões, superfícies curvas ou conversão de elementos quadrangulares em triangulares.

FIGURA 5.7: MODELO ALB4 – MALHA

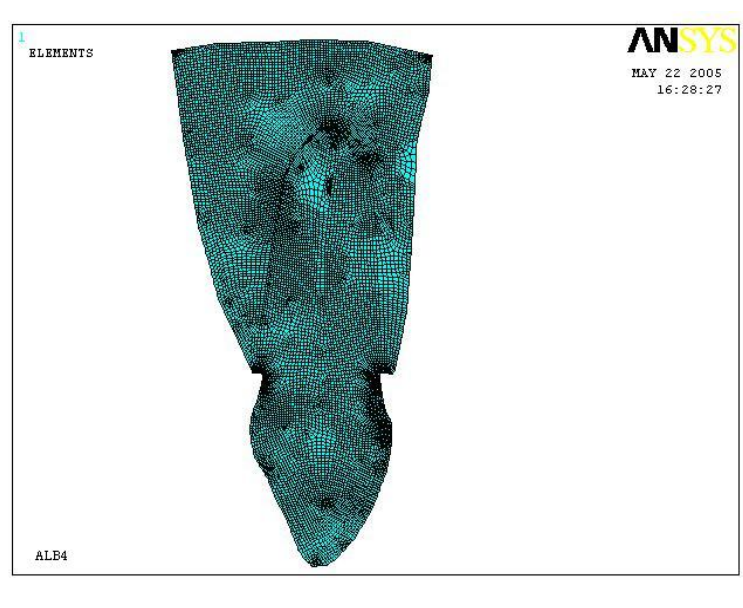
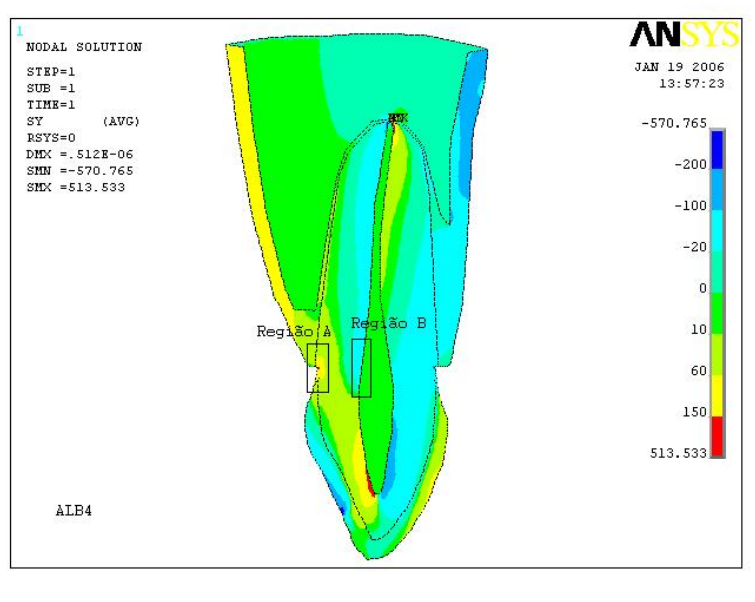
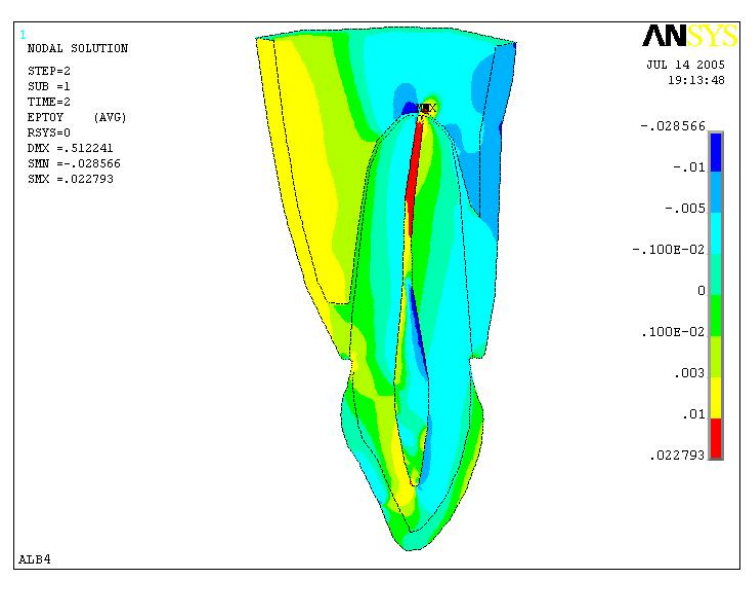


FIGURA 5.8: MODELO ALB4 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) E REGIÕES EM DESTAQUE PARA COMPARAÇÃO COM O ARTIGO DE ALBUQUERQUE ET AL. (2003) – VALORES EM MPa.



A tensão de tração sobre a parede óssea palatal e sobre a superfície palatal da polpa dentária na região da coroa, ficaram distribuídas homogeneamente. Nas superfícies opostas (vestibulares) a tensão apresentada foi compressiva, o que era o resultado esperado dada a direção da carga aplicada (FIGURA 5.8).

FIGURA 5.9: MODELO ALB4 – DEFORMAÇÕES EM  $Y$  (mm)



As deformações apresentaram concentrações e picos na região do tecido pulpar, mais pela irregularidade geométrica do modelo que por características do tecido mole como facilitador de absorção de tensões e susceptível a deformações (FIGURA 5.9). É perceptível, no entanto, a identificação das deformações na tração e na compressão, respectivamente às tensões apresentadas.

Satisfeita a primeira condição de avaliação (encontrar correspondência entre o ensaio e o artigo de referência), passou-se a avaliar os modelos onde não fossem impostas tantas alterações na geometria a fim de forçar a semelhança física com aquele do artigo.

Para a segunda etapa de avaliação, então, os ensaios computacionais foram denominados de CIM1 (malha de elementos quadrangulares) e CIM2 (malha de elementos triangulares). A proposta nessa etapa foi verificar as relações entre os resultados alcançados pelos modelos CIM1 e CIM2 com aqueles denominados ALB haja vista serem derivados da mesma imagem. Os modelos do tipo CIM contaram com uma base montada sobre a imagem adquirida para o dente incisivo central maxilar (FIGURA 5.10, comparar com FIGURA 5.6). A carga imposta foi de 100N a 45° do eixo vertical do dente, aplicado em sua face lingual e no nó limite do primeiro terço da coroa, sentido oclusal para apical.

FIGURA 5.10: MODELO DENTÁRIO PROPOSTO



As condições restritivas impostas (impedimento para deslocamentos em  $x$  e  $y$  na porção óssea superior) seguiram a proposição de Albuquerque *et al.* (2003), dada a semelhança imediata do modelo, e Lehmann, Elias e Gouvêa (2004) que

simulou modelos dentários com restrições nas áreas mesiais, distais e inferior do osso cortical (apesar de tratar-se de dente da arcada dentária inferior).

Os modelos CIM1 e CIM2 não contaram com cimento e ligamento periodontal, tratando, ainda, esses tecidos como prolongamento natural da dentina, o que os aproximou dos modelos do tipo ALB. Os modelos CIM3 a CIM5 apresentaram cimento e ligamento periodontal, sendo o modelo CIM3 apresentado como simulação em elementos de estado plano, triangulares e quadráticos. O modelo CIM4 observou a simulação com elementos de mola e CIM5, contato.

As malhas propostas e suas respectivas propriedades foram dispostas na tabela 5.5, onde se pode notar que algumas simulações foram efetuadas para elementos quadrangulares visto que o artigo original considerou tais elementos.

**TABELA 5.5: MODELOS COMPUTACIONAIS GERADOS E CONFIGURAÇÕES**

ARQUIVO	ELEMENTOS	TIPO ELEMENTO	TIPO ANÁLISE	NÚMERO ELEMENTOS	MATERIAIS
CIM1	PLANE42	Quad	PI_strain	3412	5
CIM2	PLANE2	Tri 6 nós	PI_strain	4191	5
CIM3	PLANE2	Tri 6 nós	PI_Strain	4191	7
CIM4	COMBIN40	Mola	PI_Strain	4878	8
CIM5	TARGE169 e 172	Contato	PI_Strain	4961	8

Os resultados obtidos pelas simulações no ANSYS foram comparados ao modelo calibrado ALB4 e foram apresentados na tabela 5.6 e figuras 5.11 a 5.16.

**TABELA 5.6: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS ALB4, CIM1 E CIM2**

MODELOS	REGIÃO A $\sigma_y$ (MPa)	Nó	REGIÃO B $\sigma_y$ (MPa)	Nó
<b>ALB4</b>	<b>236,30</b>	<b>23</b>	<b>-46,99</b>	<b>444/3666</b>
CIM1	198,91	27	-50,88	2084/2085
diferença(ALB4)	15,82%		8,27%	
CIM2	250,61	27	-51,79	5114/5116
diferença(ALB4)	6,05%		10,21%	

O ensaio em questão avaliou a distribuição de tensão para nós comuns na geometria dos diversos modelos e respeitando as áreas A - cervical e na direção palatal e B - coronal próxima ao tecido pulpar (vide FIGURA 5.8).

FIGURA 5.11: CIM1 – MALHA

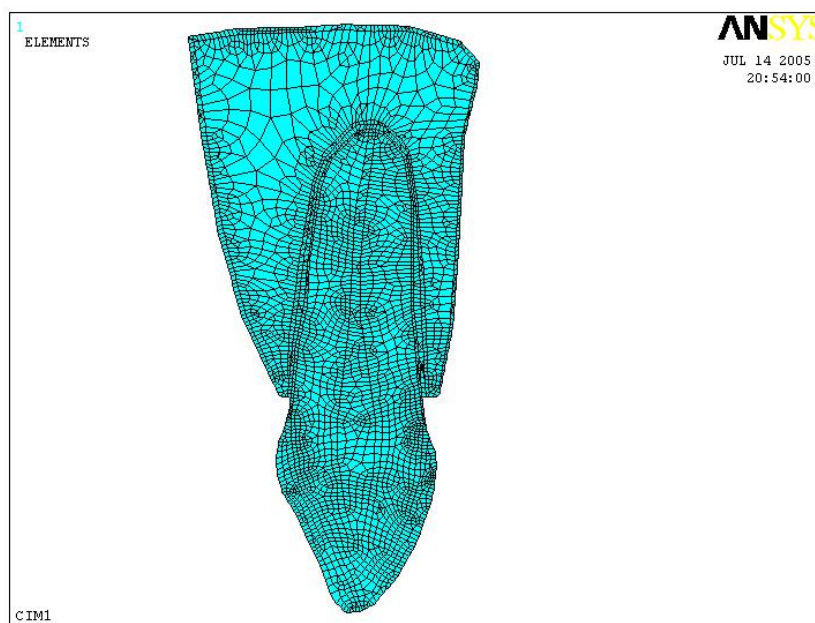


FIGURA 5.12: CIM2 - MALHA

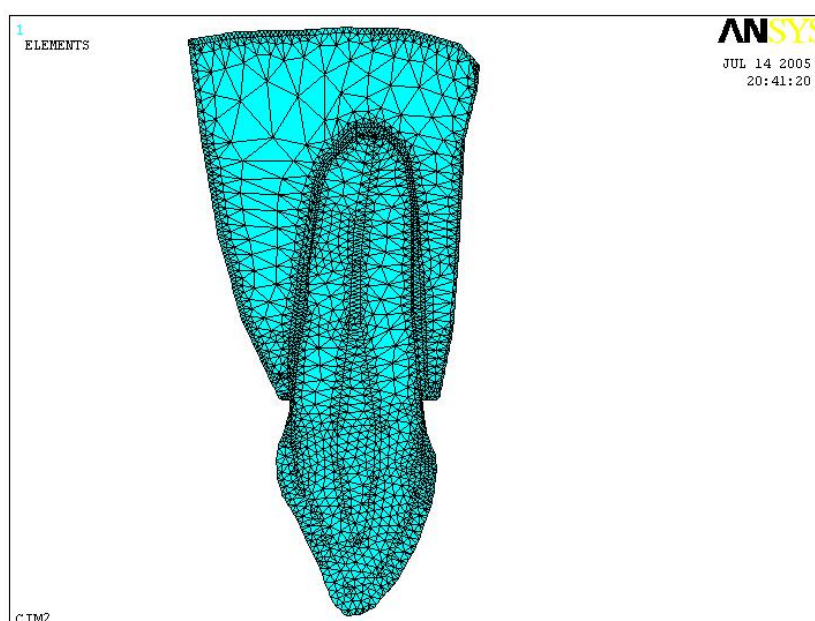


FIGURA 5.13: CIM1 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) – MPa.

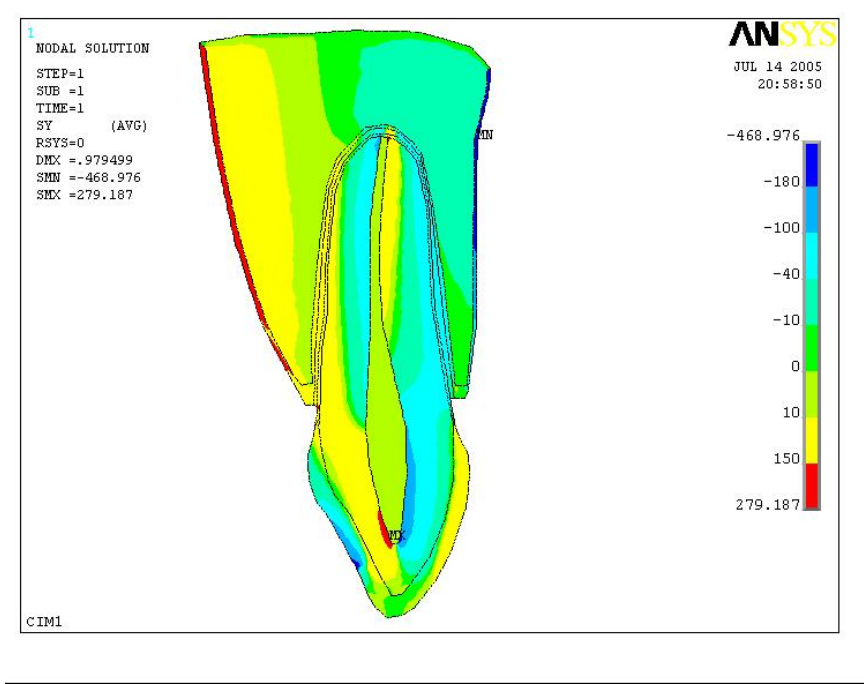


FIGURA 5.14: CIM2 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) – MPa.

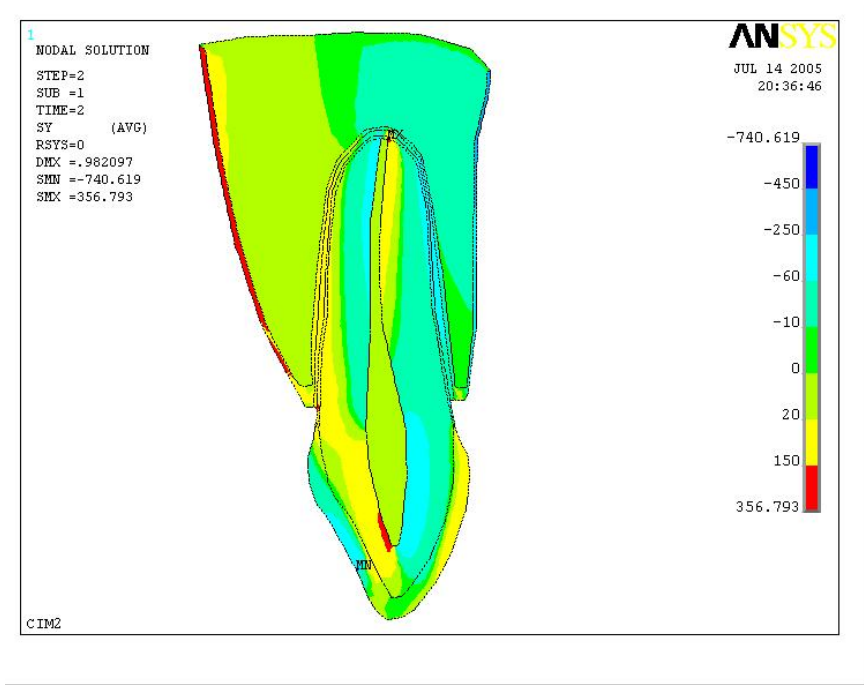
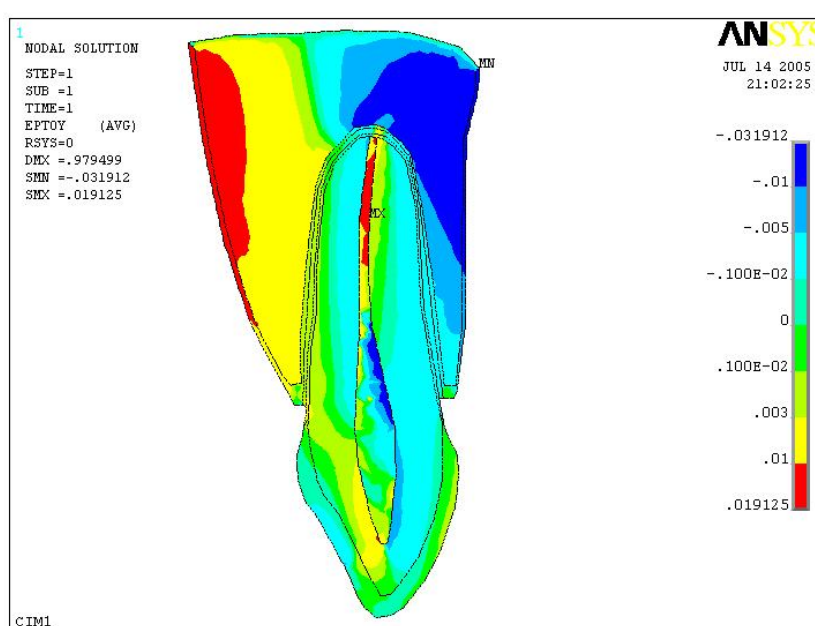
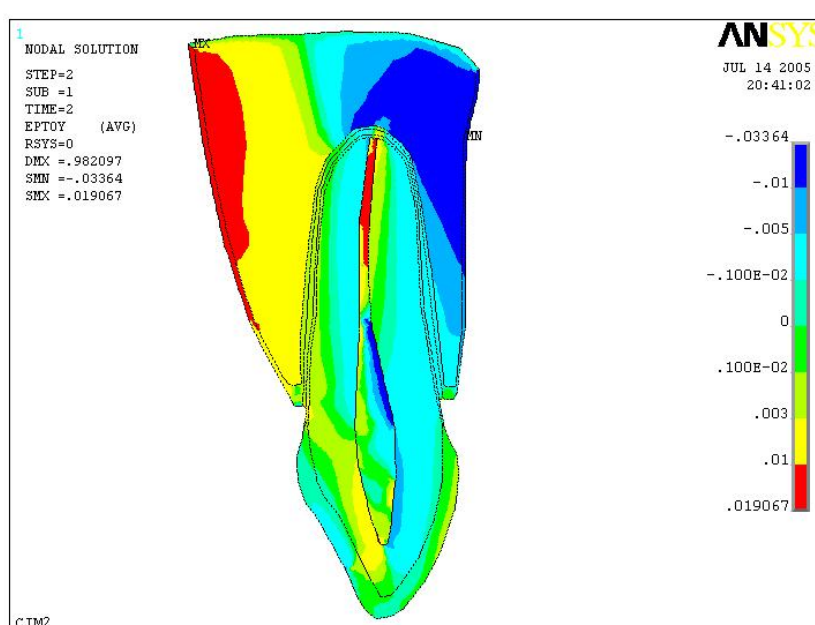




FIGURA 5.15: CIM1 – DEFORMAÇÕES EM  $Y$  (mm)FIGURA 5.16: CIM2 – DEFORMAÇÕES EM  $Y$  (mm)

A comparação em relação ao modelo ALB4 e, indiretamente, ao modelo do artigo de referência, apontou o modelo CIM2 como sendo o de maior compatibilidade de resultados, inclusive sugerindo que o espessamento na parede óssea não teria contribuído para incrementos nos níveis de tensão. Os resultados obtidos



decorreram, em parte, do fato de os elementos triangulares quadráticos apresentaram maior qualidade na conformação de modelos e melhor desempenho na convergência. Tal resultado era esperado visto que os elementos quadrados, quando da ocorrência de regiões muito diminutas, geram triângulos mal adaptados à geometria da peça.

O campo de tensões apontou para concentrações de tensões de tração no osso cortical na porção lingual e tensões compressivas na porção vestibular. Na porção óssea alveolar as tensões apresentaram uma distribuição semelhante, em parte por não terem sido tratados em separado tanto o ligamento periodontal como o cimento dentário, permitindo um caráter de maior continuidade nas propriedades dos tecidos.

Tal avaliação salientou a necessidade de investigação do comportamento da região do ligamento periodontal, seja pela curiosidade a respeito da dificuldade de simulação, seja pela forma de conexão com os tecidos adjacentes, ou ainda seu comportamento frente à distribuição de tensões e deformações.

A falta de conhecimento desse comportamento já implicou na dificuldade de recriação de modelos sintéticos do ligamento, como explicou Vosgerau (2002), citando Borchers & Reichart (1983), Babbush (1987), Kay (1989), Chapman & Kirsch (1990), El Charkawi *et al.* (1990), Cavicchia e Bravi (1994), El Charwawi *et al.* (1994) e Papavasiliou *et al.* (1996), onde comentou sobre tentativas frustradas, de alguns fabricantes, de produzirem componentes protéticos intermediários (IME em polioximetileno) que permitiriam uma simulação do ligamento periodontal.

Com o objetivo de incluir os tecidos restantes e avaliar o impacto e o comportamento do ligamento periodontal, o modelo de trabalho que passou a orientar as avaliações foi o modelo calibrado CIM2.

### **5.2.7 Simulação do ligamento periodontal com elemento plano (PLANE2)**

O modelo CIM3 baseou-se no modelo CIM2 com acréscimo das propriedades do cimento e ligamento periodontal. Como eram esperados, os resultados assumiram valores discrepantes dos anteriores. Em primeiro lugar, as camadas

relativas ao ligamento periodontal e cimento deixaram de ser tratadas como prolongamentos da dentina, passando a receber valores próprios de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson (Tabela 5.3). O cimento deixou de utilizar o módulo de elasticidade da dentina, reduzindo de 18,6 GPa para 14 GPa, sem alteração do coeficiente de Poisson. O ligamento periodontal teve o módulo de elasticidade reduzido de 18,6 GPa para 0,003 GPa e coeficiente de Poisson aumentado de 0,31 para 0,45, afetando significativamente a compressibilidade do material.

A tabela 5.7, abaixo, contou com campos separados para exposição dos valores de tensão no ligamento periodontal, cimento e dentina. Os valores obtidos vieram destacar o impacto que a alteração dos módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson provocaram no modelo CIM3, relativamente ao modelo CIM2.

TABELA 5.7: COMPARAÇÃO - CIM3 *VERSUS* MODELO DE REFERÊNCIA CIM2

MODELOS	REGIÃO A $\sigma_y$ (MPa)	Nó	REGIÃO B $\sigma_y$ (MPa)	Nó
<b>CIM2</b>	<b>230,36</b>	<b>27</b>	<b>-51,79</b>	<b>5114/5116</b>
CIM3 (ligamento)	8,87	27		
diferença	96,15%			
CIM3 (cimento)	123,94	27		
diferença	46,20%			
CIM3 (dentina)			-166,02	5114/5116
diferença			220,56%	

As figuras 5.17, 5.18 e 5.19 apresentaram a malha, tensões e deformações em  $y$ , tais como os modelos ALB4, CIM1 e CIM2. A figura 5.20, por sua vez, acrescentou a avaliação das tensões de Von Mises.

As diferenças percentuais elevadas refletiram a importância do lançamento das propriedades dos materiais, significando que modelos simplificados (com omissão de tecidos) podem induzir a leituras erradas na magnitude das tensões e deformações envolvidas.

FIGURA 5.17: CIM3 – MALHA

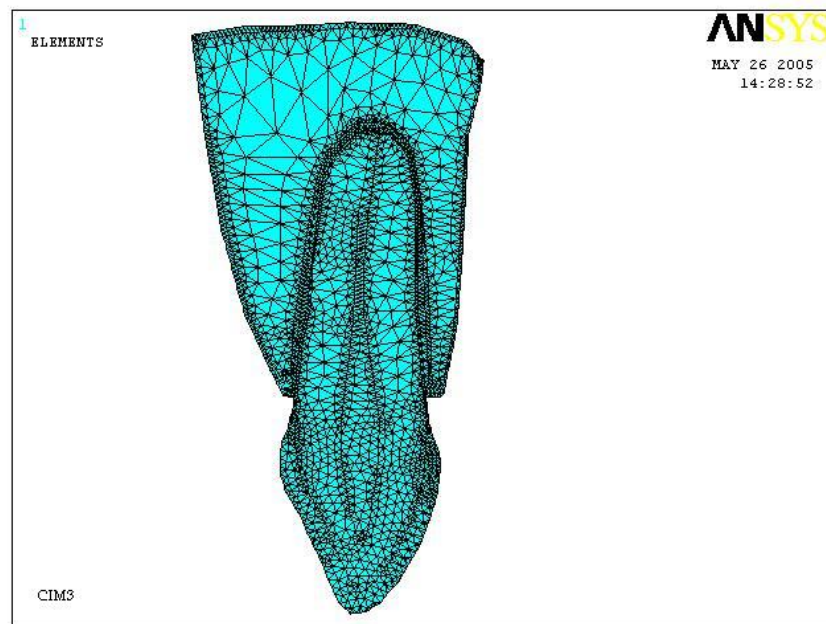
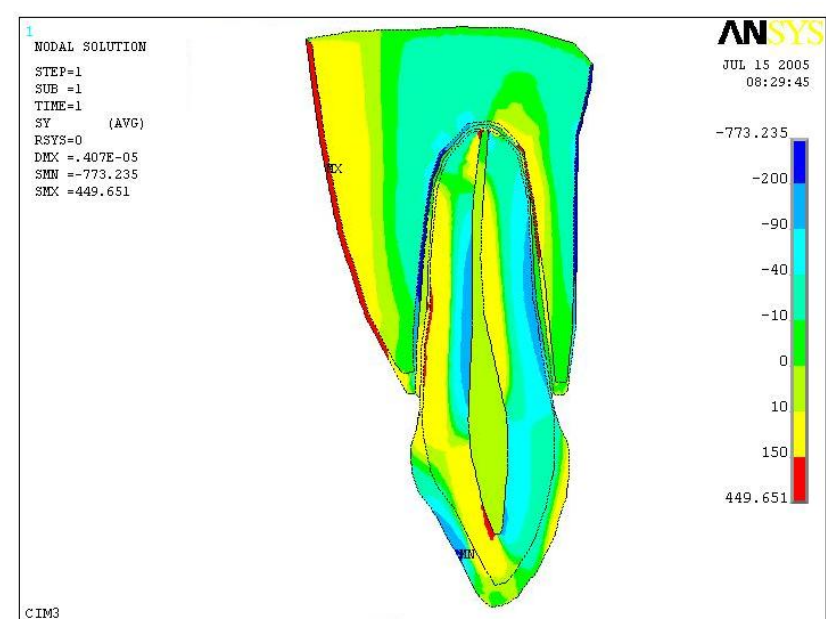
FIGURA 5.18: CIM3 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) – MPa.

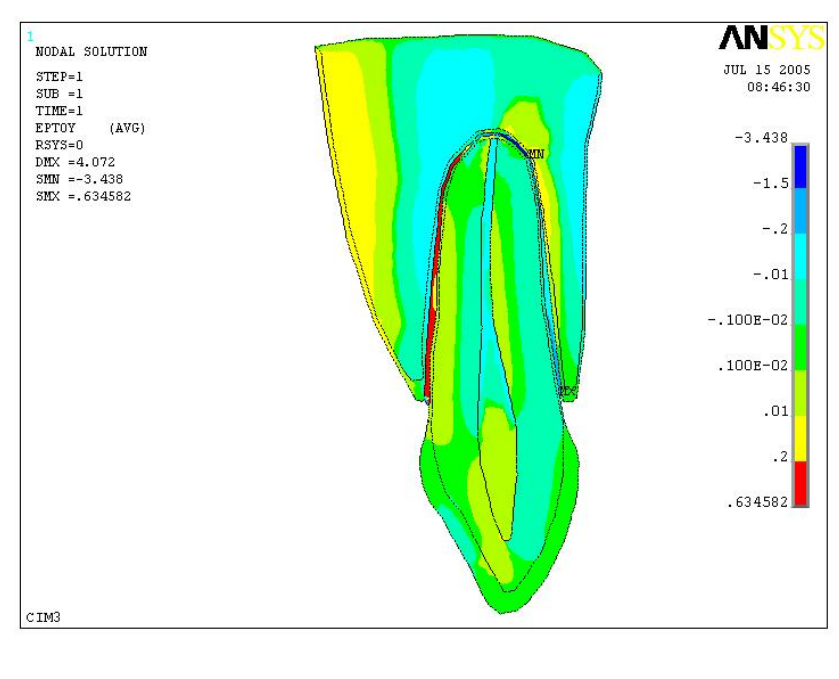
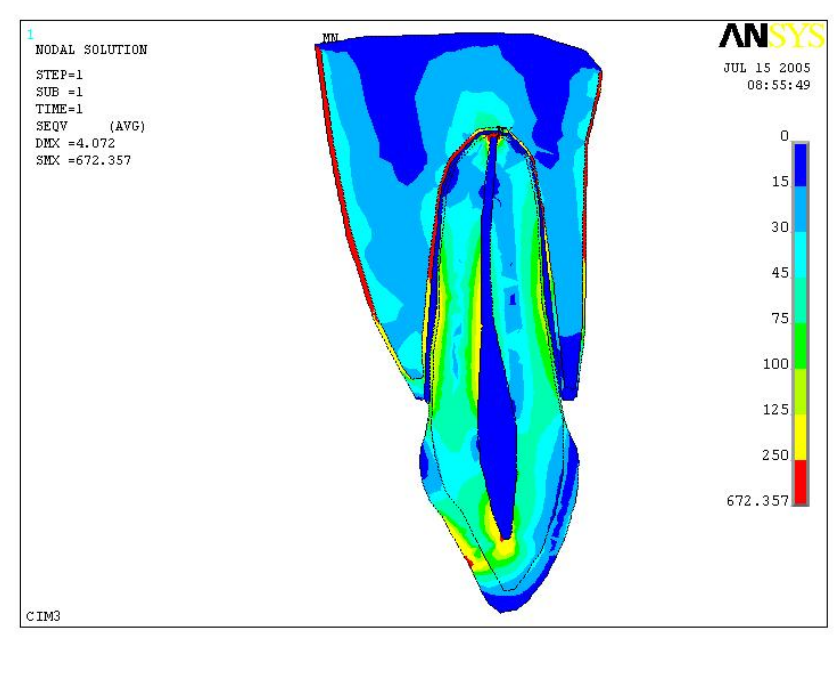
FIGURA 5.19: CIM3 – DEFORMAÇÕES EM  $Y$  (mm)

FIGURA 5.20: CIM3 – TENSÕES DE VON MISES – MPa.

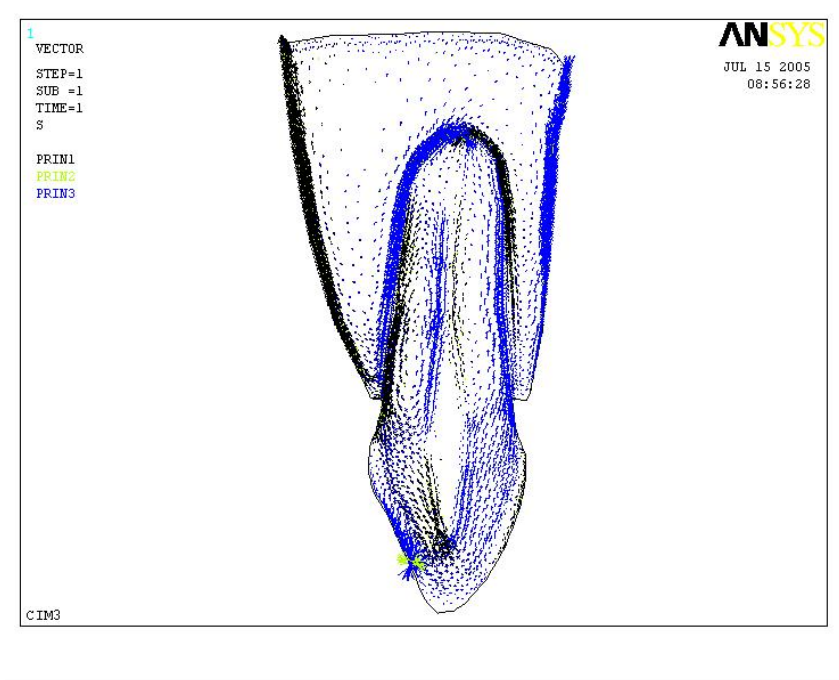


O espectro de cores relativo às tensões refletiu a concentração de trações na parede óssea palatal, enquanto as tensões compressivas atuaram, predominantemente, na face vestibular, em concordância com a direção e sentido de aplicação da força (vide Figura 5.10).

Da figura 5.18 subentendeu-se que, conquanto as tensões tenham sofrido majoração em sua amplitude, a distribuição dessas tensões, agora, acompanharam todo o desenho do alvéolo, ou seja, o ligamento proporcionou uma distribuição quase contínua para os ossos alveolar e cortical, ao invés de concentrá-las nas paredes externas. Tal fato ganha relevância quando encarado sob a suposição de que a ausência de ligamento gera concentrações e essas induzem a absorção ou aposição ósseas.

Os valores de pico não foram levados em conta, dada a existência de irregularidades na geração do modelo, importando mais a consideração do comportamento do sistema como um todo e da avaliação de regiões de concentrações de tensões (VOSGERAU, 2002).

FIGURA 5.21: CIM3 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS



A distribuição vetorial salientou concentrações de tensões de tração na porção óssea cortical vestibular, na porção lingual do osso alveolar e na região cervical vestibular do cimento, as duas últimas como sendo regiões de *gap* potenciais quando da rotação do dente no alvéolo (FIGURA 5.22). As tensões compressivas, por sua vez, concentraram-se na porção lingual do osso cortical, na porção vestibular do osso alveolar e na região cervical lingual do cimento, em oposição às regiões de apresentação de tensões de tração.

FIGURA 5.22 – CIM3 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA

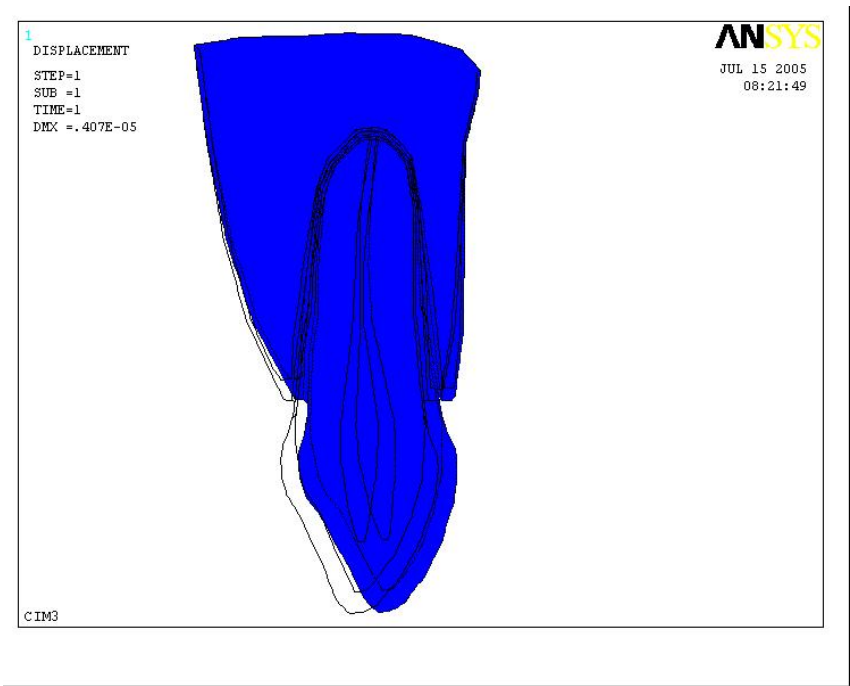


FIGURA 5.23 – CIM3 – DETALHAMENTO DOS VETORES DE TENSÕES NA REGIÃO DO LIGAMENTO PERIODONTAL



A figura 5.23 acima destaca o comportamento das tensões principais na região do ligamento periodontal, salientando as regiões de *gap* potencial onde a tensão principal  $\sigma_1$  (PRIN1 no ANSYS) está em destaque.

### 5.2.8 Simulação do ligamento periodontal com elemento de mola (COMBIN40)

A simulação do ligamento com elementos de mola foi estabelecida segundo a observação de se considerarem os ligamentos como feixes de molas orgânicas.

A dificuldade da presente simulação residiu no questionamento de quantas molas seriam necessárias para aproximar o comportamento de todo o tecido. Se o número fosse baixo, haveria sobrecarga de tensões sobre as poucas unidades disponíveis; se excessivo o número, aumentaria demasiadamente o poder de absorção das cargas o que dificultaria a confiabilidade dos dados, além da inclusão de um problema de ordem técnica, relativo a diminuição de espaços entre os pontos de controle (*keypoints*) para padrões muito pequenos, o que poderia gerar distorções significativas nas malhas. Outra dificuldade residiu na orientação dessas molas visto que no tecido natural há vários grupos diferentes, orientados de maneira diversa e que se combinam permeados por uma componente denominada matriz do tecido conjuntivo.

Para a presente simulação optou-se pela modelagem de um grupo de 198 elementos de mola, sendo 99 com grau de liberdade na direção *x* e 99 em *y*. As orientações das molas seguiram a curvatura natural das superfícies dentárias e guardando relação com as orientações constantes da literatura (PROVATIDIS, 2000). O número 198 foi uma opção pela colocação de um elemento em correspondência com cada nó de controle na superfície dos tecidos circundantes e pelo fato de não haver sugestão a respeito na literatura consultada. E a região relativa ao ligamento periodontal foi preenchida com um material auxiliar de módulo de elasticidade de 0,000001 GPa, ou seja, insignificante frente ao módulo das molas de 0,003 GPa e que não contribuiu para alterações significativas nos valores de tensões.

Tal proposição de modelagem não esgotou a abordagem sobre a adequação daquele número a realidade do evento simulado, ao contrário, veio salientar a necessidade de avaliações mais específicas sobre o tema.

A necessidade de gerar uma região auxiliar no ligamento periodontal e que não interferisse na distribuição de tensões foi identificada na formulação do elemento utilizado COMBIN40, quando os nós que geram a mola não são coincidentes. No presente modelo, se retirada a região auxiliar haverá um *gap* não constante em todo o contorno da raiz, induzindo a solução no aplicativo ANSYS para a translação de corpo rígido, visto que o dente passa a ficar completamente desacoplado do osso.

Para a elaboração do modelo de mola foi requerido um grupo de parâmetros, onde a maioria obteve-se por aproximação, dado que as dimensões dos tecidos envolvidos não são homogêneas e as informações disponíveis não são completas.

A determinação do parâmetro  $K$  da mola, ou seja, o coeficiente que permite identificar sua capacidade elástica, obedeceu ao seguinte critério:

$$K = \frac{AE}{L} \quad (5.1)$$

Onde,

$K$  é a constante de mola;

$A$  é a área da seção transversal onde atua a mola;

$E$  é o módulo de elasticidade do material que compõe a mola;

$L$  é o comprimento da mola

Assim,

$$K = \frac{\frac{27,05E - 03m}{198 \text{ elementos}} \times 0,003E09Pa}{0,22E - 03m} = 1,86E06Pa \quad (5.2)$$

O volume estimado do ligamento no modelo foi de  $5,95 \text{ mm}^3$ , a área de  $27,05 \text{ mm} \times 0,22 \text{ mm} = 5,95 \text{ mm}^2$ . A ausência de dados prejudicou a consideração de um coeficiente de atrito que permitisse tratar a possibilidade de escorregamento de uma superfície sobre a outra quando da extrapolação da força de atrito.

Os resultados obtidos com a simulação computacional CIM4, foram dispostos na tabela 5.8 e figuras 5.24 a 5.32, abaixo.



TABELA 5.8: COMPARAÇÃO - CIM4 VERSUS MODELO DE REFERÊNCIA CIM2

MODELOS	REGIÃO A $\sigma_y$ (MPa)	Nó	REGIÃO B $\sigma_y$ (MPa)	Nó
<b>CIM2</b>	<b>230,36</b>	<b>27</b>	<b>-51,79</b>	<b>5114/5116</b>
CIM4 (cimento)	85,152	10090		
diferença	63,03%			
CIM4 (dentina)			-149,33	15897
diferença			188,33%	

A tensão indicada para a porção do ligamento foi obtida na região de máxima tensão de tração correspondendo a localização da matriz. No entanto, esse não foi o padrão no tecido do ligamento periodontal, para o qual percebeu-se que o elemento de mola não retendo as tensões, transferiu-as aos tecidos adjacentes (cimento e osso alveolar).

O comportamento geral do ensaio tendeu para os resultados verificados com o modelo de referência CIM2, haja vista a maior semelhança das propriedades da matriz com a dentina do que com o ligamento periodontal.

Assim como observado para a tabela 5.7, as diferenças percentuais elevadas continuaram refletindo a importância do lançamento das propriedades dos materiais.

FIGURA 5.24: CIM4 – MALHA

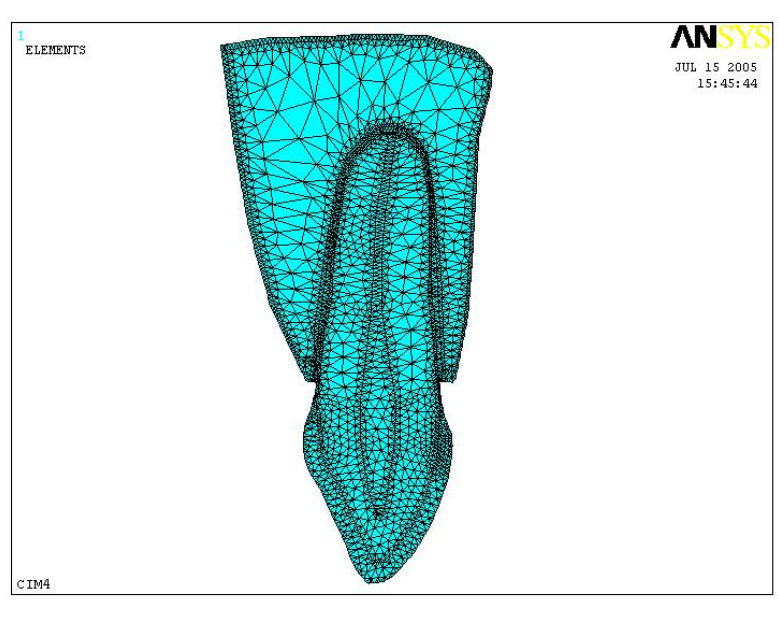


FIGURA 5.25: CIM4 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) – MPa.

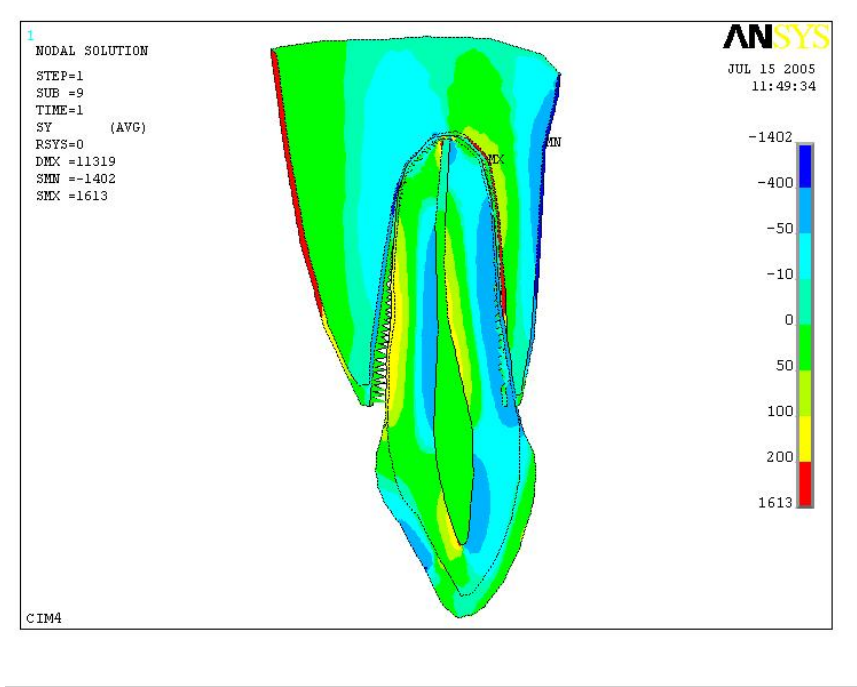


FIGURA 5.26: CIM4 – DEFORMAÇÕES EM Y ( $10^{-5}$ mm)

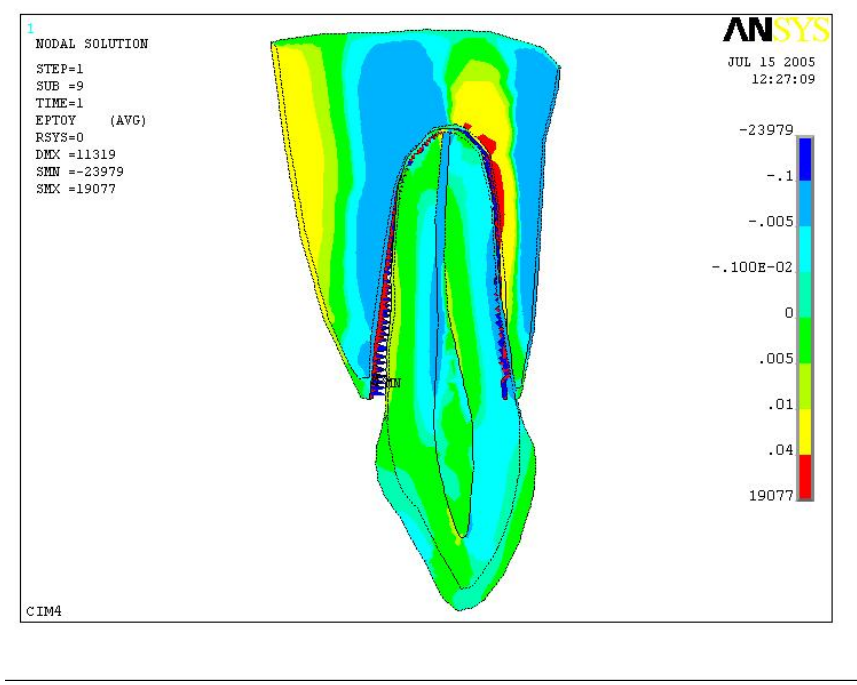


FIGURA 5.27: CIM4 – TENSÕES DE VON MISES – MPa.

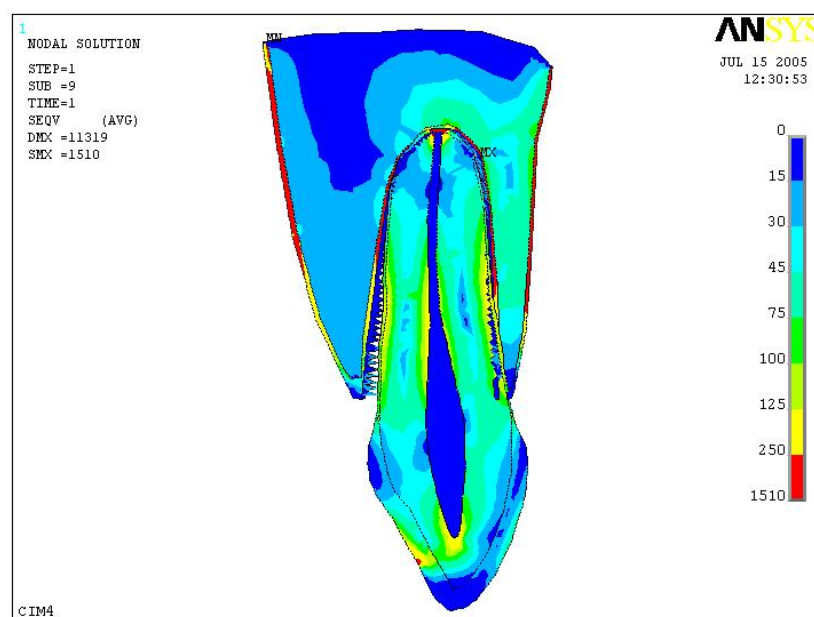
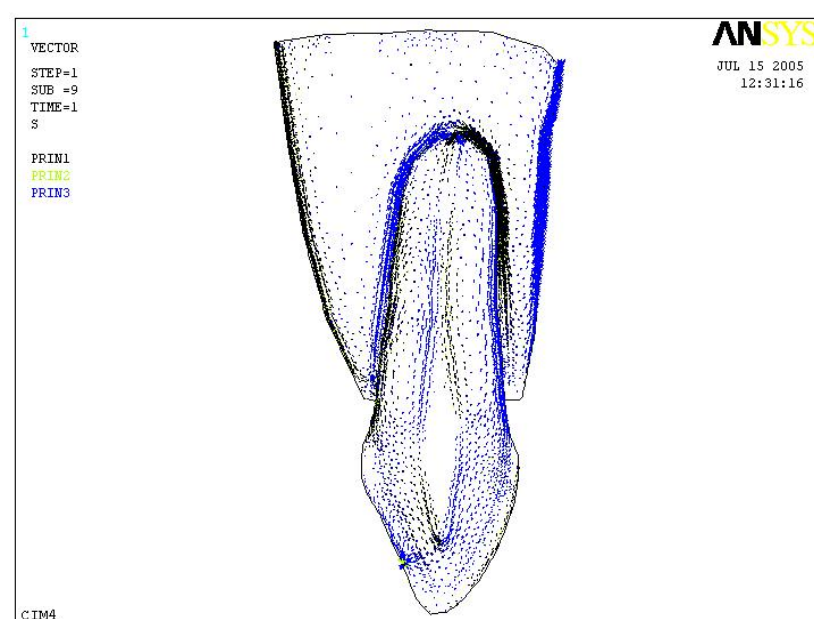


FIGURA 5.28 – CIM4 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS



A simulação proposta, em princípio, obteve desempenho aproximado ao esperado visto conseguir representar o giro do dente em seu alvéolo, mostrar os estiramentos provocados nas fibras nas regiões de tração, bem como a compressão sofrida nas regiões de tensão compressiva,

Destaque-se da figura 5.28 que o elemento de mola apresentou uma concentração menos acentuada das tensões principais se comparado à mesma representação com elemento de estado plano (FIGURA 5.21), principalmente quanto à representação das tensões de tração na parede cortical lingual.

A distribuição dos vetores de tensões principais na simulação CIM4, de modo similar ao ocorrido para a simulação em estado plano CIM3, apresentou regiões opostas em comportamento compressivo e de tração nas paredes ósseas corticais, estando a compressão registrada na porção vestibular, enquanto a tração apresentou-se na porção lingual.

FIGURA 5.29 – CIM4 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA

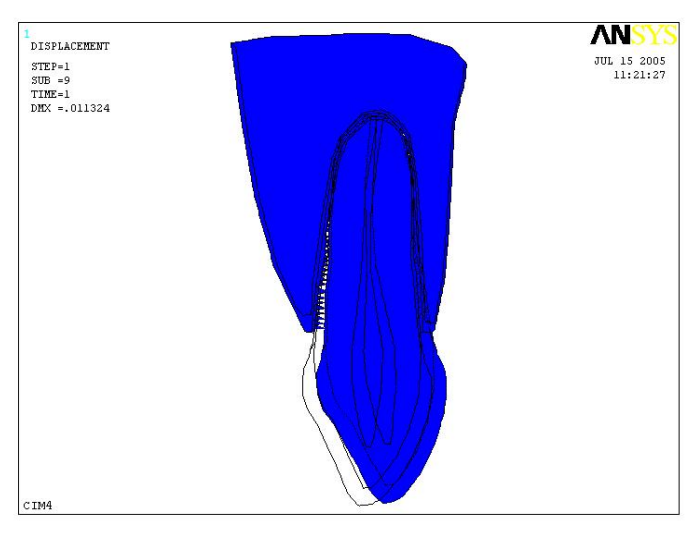


FIGURA 5.30 – CIM4 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO CERVICAL

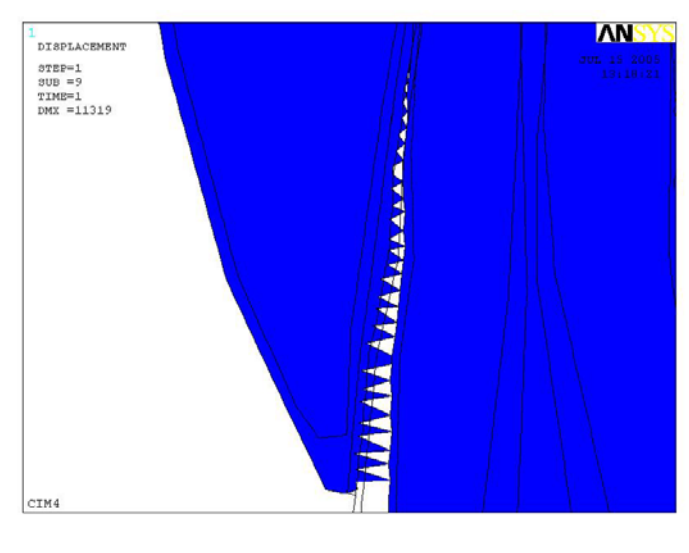
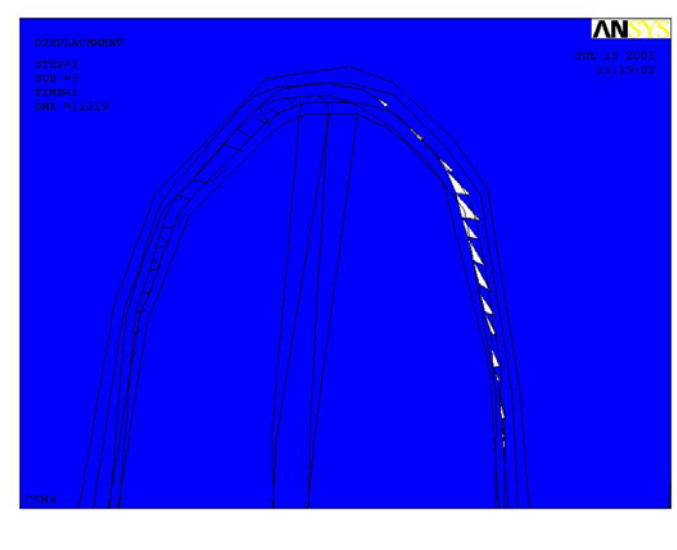


FIGURA 5.31 – CIM4 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO APICAL



Das figuras 5.29 a 5.31 observam-se a variação sofrida pelo corpo dentário quando da mudança da configuração deformada para a indeformada, inclusive apresentando as regiões de *gap* verificadas quando do giro do dente dentro do alvéolo, o que era um comportamento desejado.

A figura 5.32, a seguir, procurou trazer o detalhamento da distribuição dos vetores de tensões principais especificamente na região do ligamento periodontal.

FIGURA 5.32 – CIM4 – DETALHAMENTO DOS VETORES DE TENSÕES NA REGIÃO DO LIGAMENTO PERIODONTAL



### 5.2.9 Simulação do ligamento periodontal com elementos de contato (TARGE169 e CONTA172)

A simulação com elementos de contato deu-se com o modelo computacional denominado CIM5 e está registrado na tabela 5.9 e figuras 5.33 a 5.45, abaixo.

A extensão real do contato não foi requerida previamente para a geração dos elementos e a quantidade desses também pode ser tomada em número maior que o realmente necessário, devido à associação do nó de contato com diversas linhas *target* vizinhas. A geração de contato considerando ambas as áreas como *target* e como *contact* foi adotada na simulação para garantir a simetria do modelo (VOSGERAU, 2002).

Os modelos foram estabelecidos considerando o mesmo coeficiente de atrito adotado na simulação com elementos de mola, ou seja,  $\mu$  igual a 0,12 (default no ANSYS), subentendendo-se a existência de resistência significativa no deslizamento de uma superfície sobre a outra.

Para a geração dos modelos computacionais envolvendo elementos de contato houve necessidade de assumir-se uma região que permitisse o acoplamento entre as superfícies *target* e contato, evitando-se o movimento de corpo rígido pelo total desacoplamento do dente ao osso alveolar. Identicamente a situação apresentada na modelagem com elemento de mola, foi utilizado o material denominado MATERIAL AUXILIAR com baixíssimo módulo de elasticidade a fim de não interferir nas distribuições de tensões.

TABELA 5.9: COMPARAÇÃO - CIM5 VERSUS MODELO DE REFERÊNCIA CIM2

MODELOS	REGIÃO A $\sigma_y$ (MPa)	Nó	REGIÃO B $\sigma_y$ (MPa)	Nó
<b>CIM2</b>	<b>230,36</b>	<b>27</b>	<b>-51,79</b>	<b>5114/5116</b>
CIM5 (cimento)	61,99	8877		
diferença	73,08%			
CIM5 (dentina)			-80,82	14057
diferença			56,05%	

Da tabela 5.9, acima, ficou evidenciada a semelhança do resultado de tração apresentado no modelo CIM4 (elemento de mola). No entanto, tal semelhança era esperada visto que as propriedades de rigidez daquele modelo foram adotadas para o modelo CIM5.

Tal como comentado para as tabelas 5.7 e 5.8, as diferenças percentuais refletiram a importância do lançamento das propriedades de todos os materiais envolvidos.

FIGURA 5.33: CIM5 – MALHA

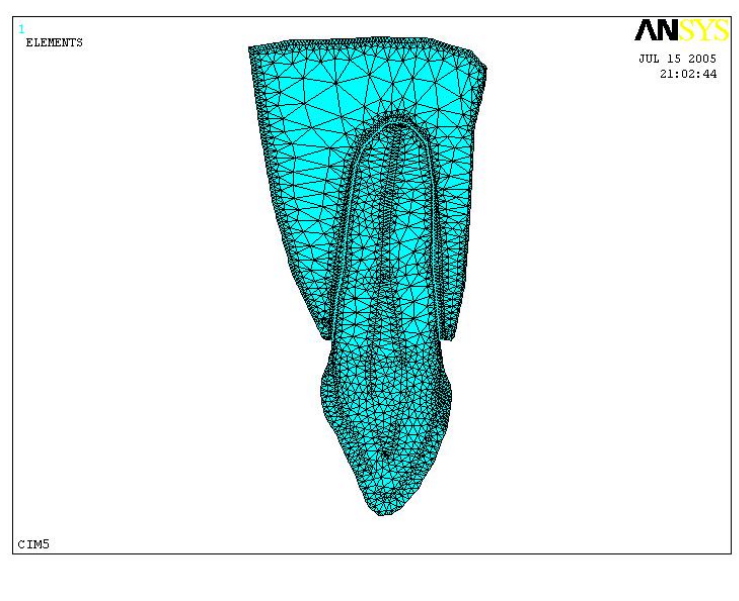


FIGURA 5.34: CIM5 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM ( $\sigma_y$ ) – MPa.

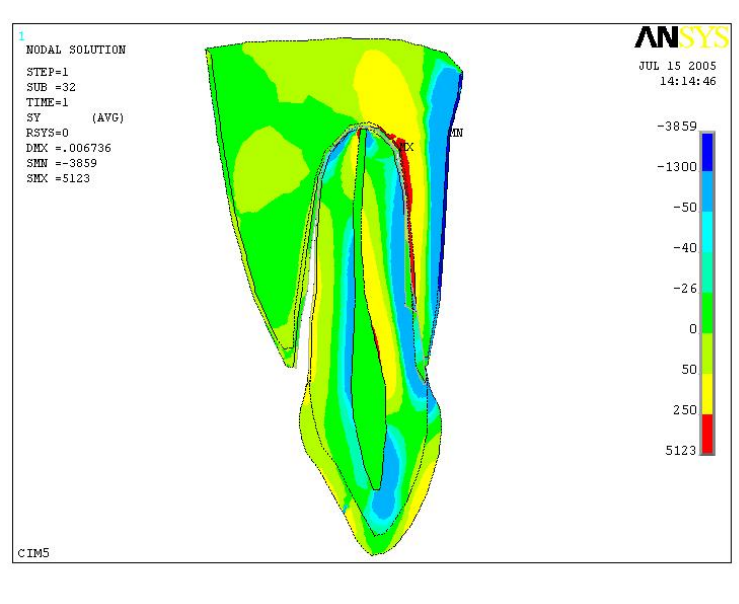


FIGURA 5.35: CIM5 – DEFORMAÇÕES EM Y (10mm)

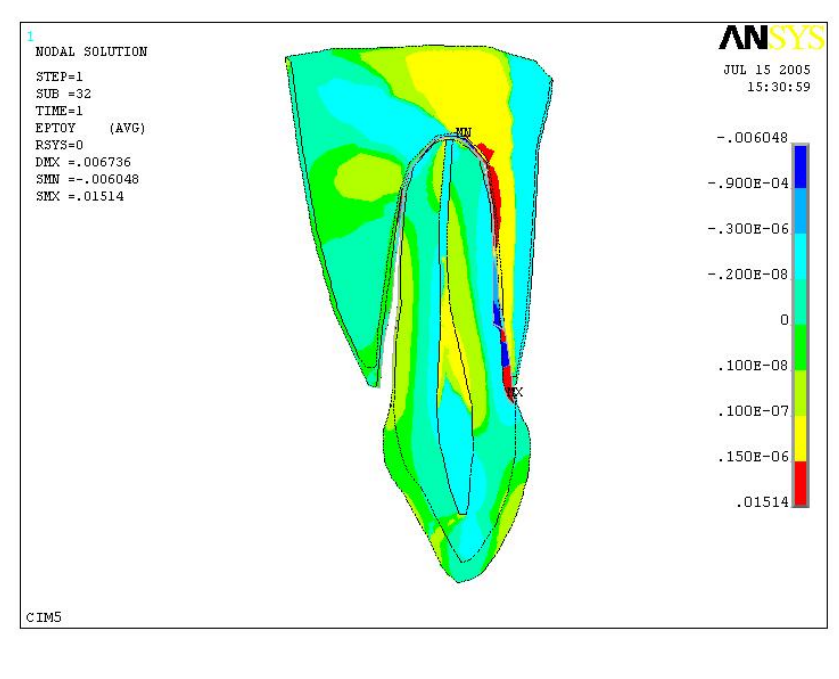
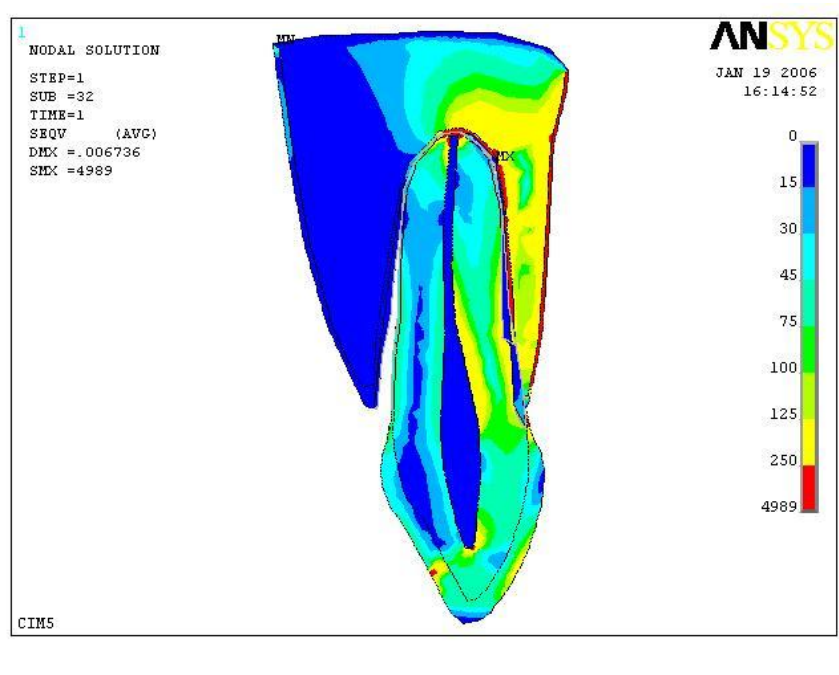


FIGURA 5.36: CIM5 – TENSÕES DE VON MISES – MPa.



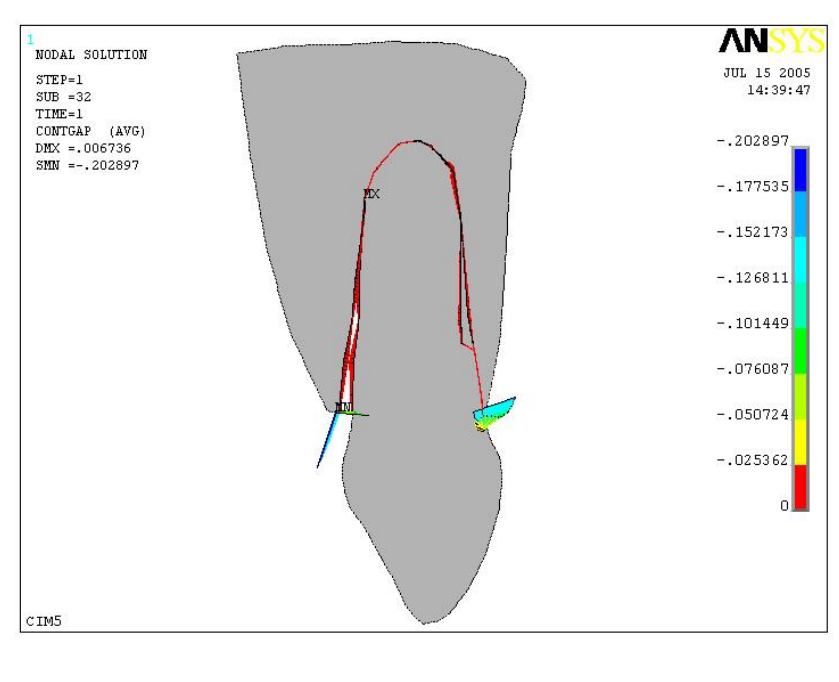
As figuras 5.33 e 5.36, permitiram avaliar a performance do elemento de contato comparativamente àqueles resultados obtidos pelos elementos anteriores (elemento plano e elemento de mola), tendo apresentado *gap* na regiões cervical e apical. Outra informação, no descolamento da parte cervical houve praticamente



uma interrupção na distribuição das tensões para parte dos ossos trabecular e cortical na porção lingual.

A simulação do elemento de contato, em virtude da disponibilização de imagens geradas especificamente para essa formulação, possibilitou a análise qualitativa do *gap*, do deslizamento, das tensões, do status e da penetração ocasionada quando da compressão realizada juntamente com o giro do dente (FIGURAS 5.37 a 5.41), abaixo.

FIGURA 5.37 – CIM5 – GAP



Observe-se (FIGURA 5.37) que os valores negativos representaram efetivamente os valores existentes de *gap* e o valor zero compreendeu o fechamento do contato. As denominações de máximo e mínimo, então, significaram máximo contato (mínimo *gap*) e mínimo contato (máximo *gap*), respectivamente.

As figuras 5.38 e 5.39 e 5.40 salientaram as regiões onde, em decorrência do giro do dente dentro do alvéolo, houve maior ação dos contatos com ocorrência inclusive de deslizamentos e penetrações da superfície mais rígida na superfície menos rígida.

FIGURA 5.38 – CIM5 – DESLIZAMENTO

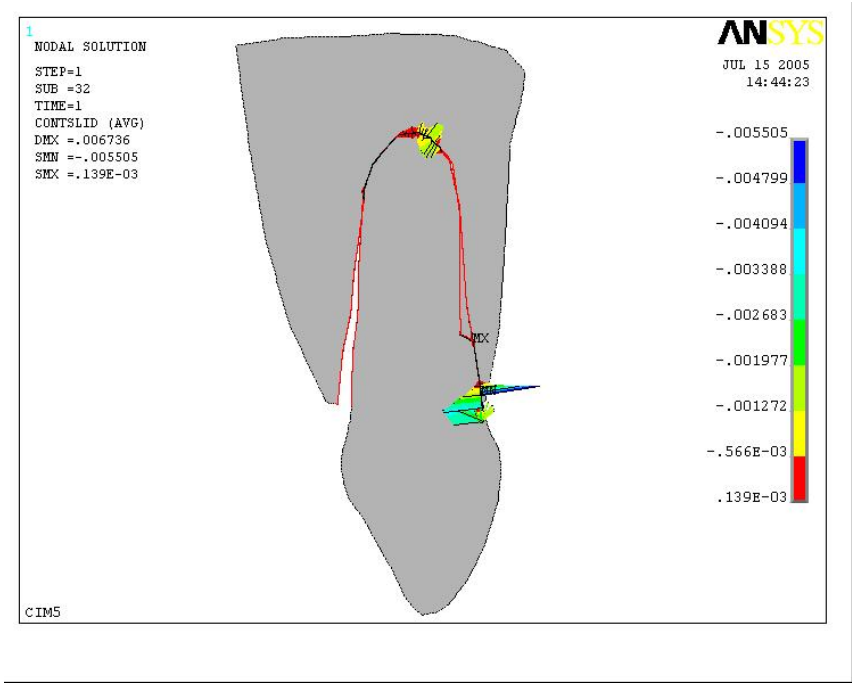


FIGURA 5.39 – CIM5 – TENSÕES

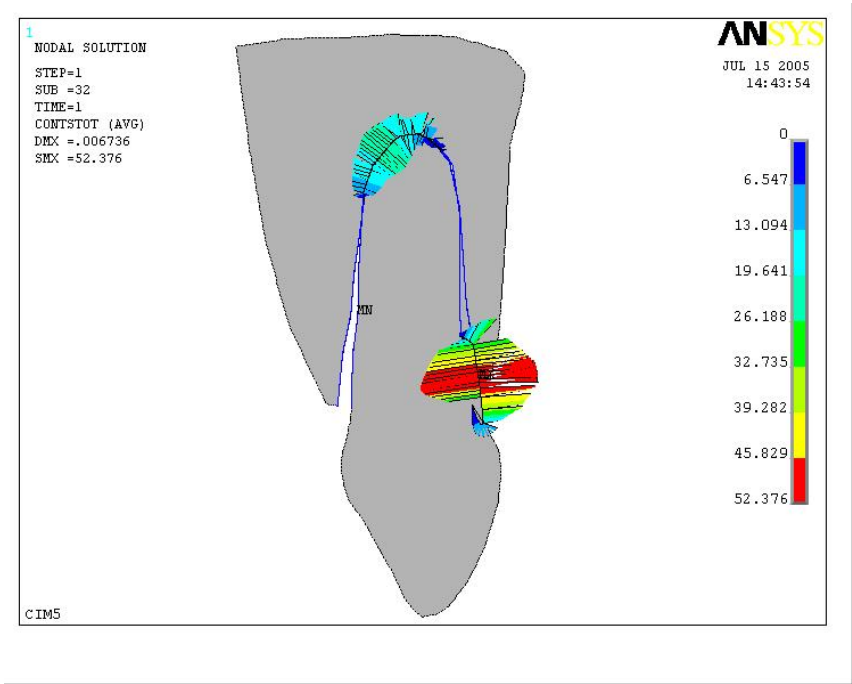
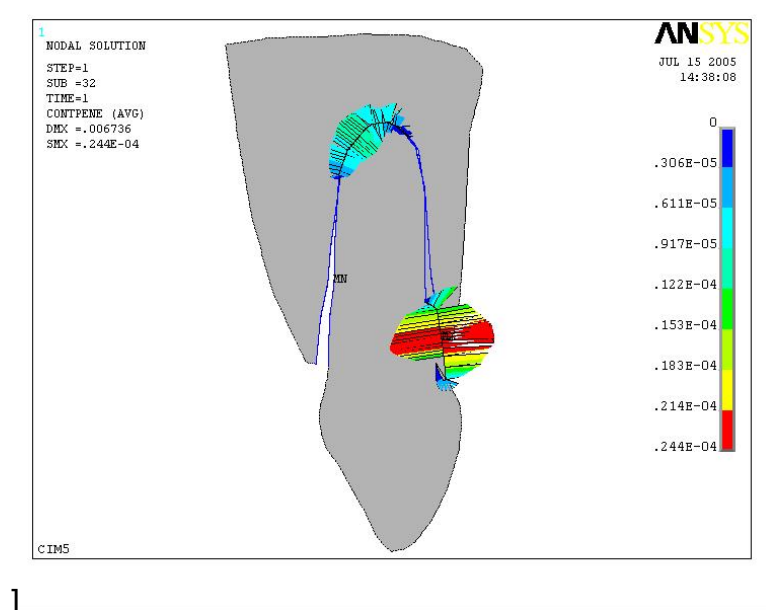
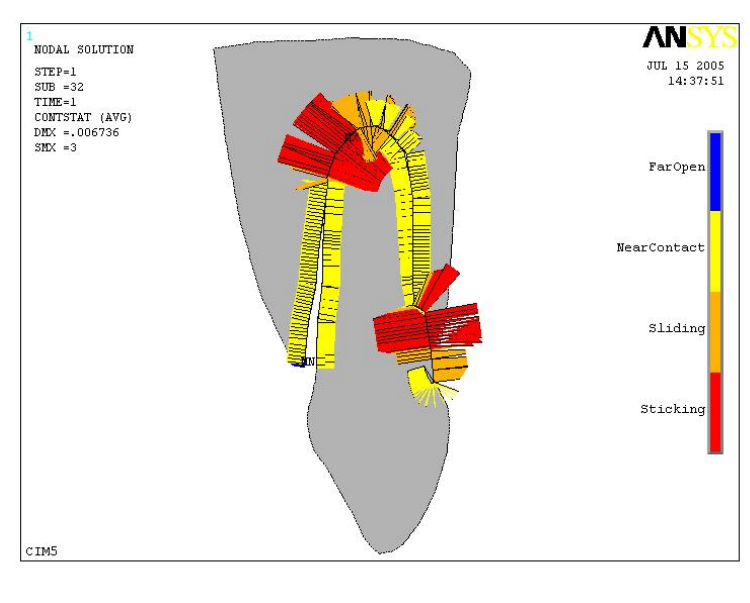


FIGURA 5.40 – CIM5 – PENETRAÇÕES



A figura 5.41 possibilitou uma visão geral e qualitativa do processo de contato apontando regiões onde as superfícies não entraram em contato (nem na iminência de entrar em contato) denominado *faropen*, em azul, correlata a região de máximo *gap*. A região *nearcontact*, em amarelo, determinou regiões em contato ou na iminência de contato. O termo *sliding*, em laranja, os pontos onde houve ocorrência de deslizamentos e a região em vermelho, *sticking*, tratou a ocorrência de potencial penetração e contato com tendência a resistir a uma separação.

FIGURA 5.41 – CIM5 – STATUS



Além desses resultados ainda foi possível destacar-se a apresentação das configurações deformada e indeformada, o zoom para as regiões de *gap* e os vetores de tensão para o modelo como um todo (FIGURAS 5.42 a 5.45).

FIGURA 5.42- CIM5 – CONFIGURAÇÃO DEFORMADA X INDEFORMADA

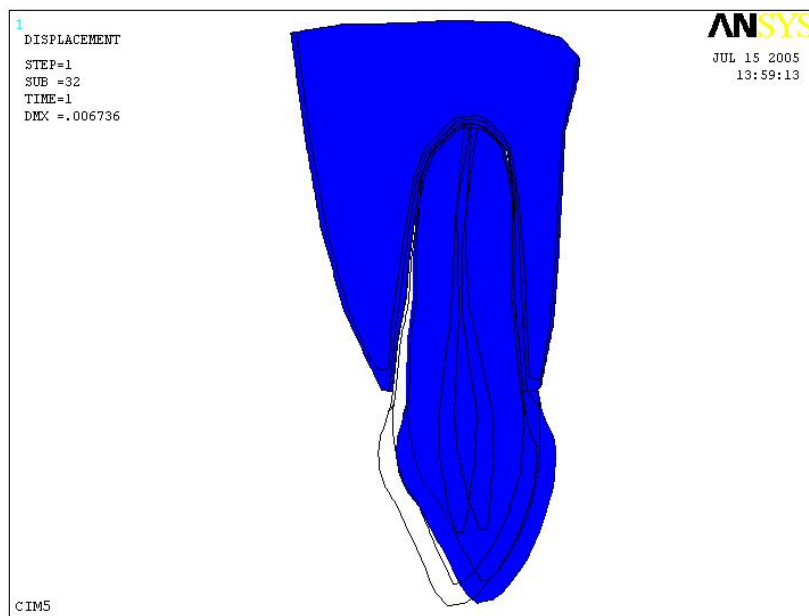


FIGURA 5.43 – CIM5 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO CERVICAL

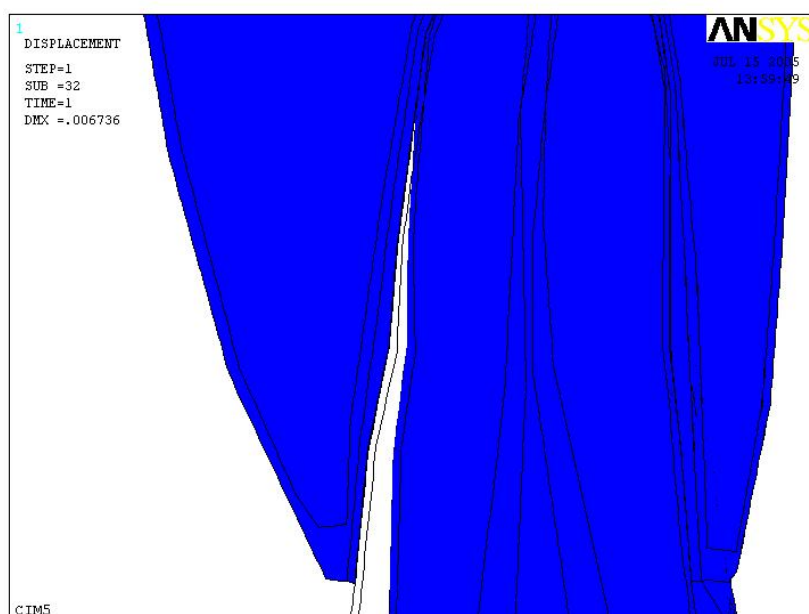
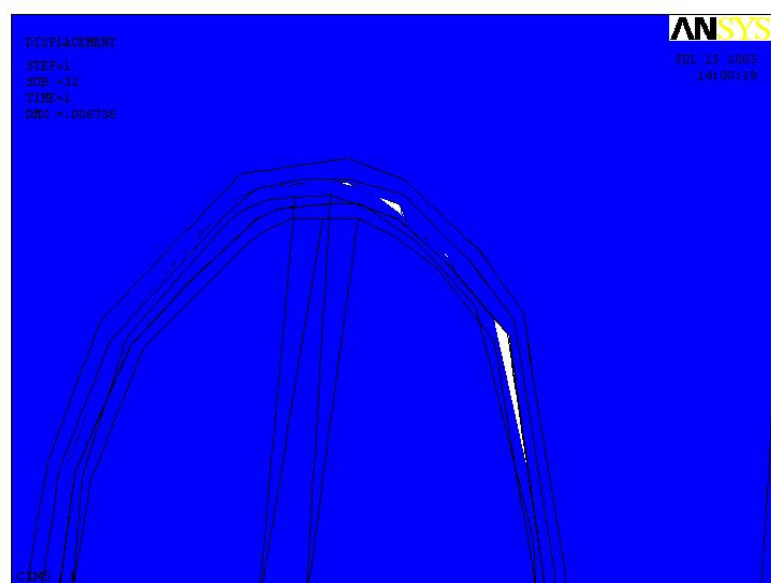
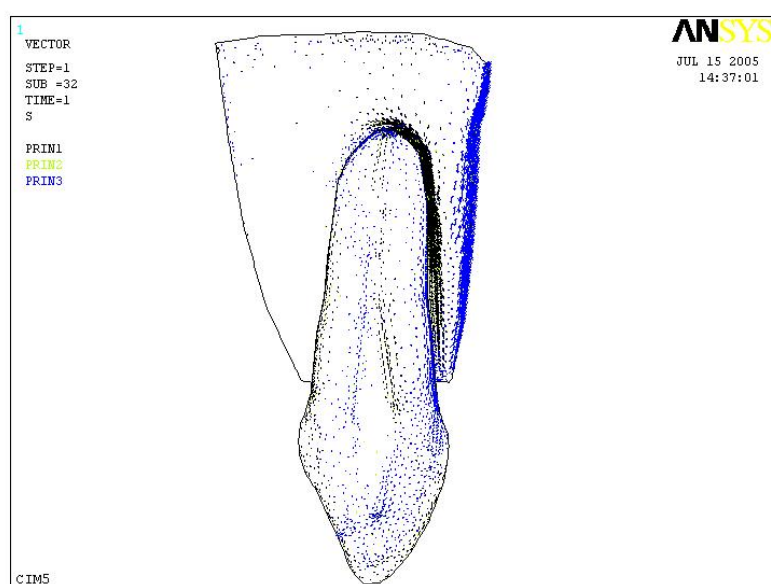


FIGURA 5.44 – CIM5 – ZOOM DO GAP NA REGIÃO APICAL



A figura 5.45, abaixo, apontou para uma possível desvantagem do modelo de contato frente às outras formulações. Na ocorrência do giro, há descolamento da região cervical lingual do osso alveolar adjacente, sugerindo que no *gap* máximo não atuariam transmissão de esforços. Os vetores de tensão, então, representaram apenas a região vestibular em compressão.

FIGURA 5.45 – CIM5 – DISTRIBUIÇÃO VETORIAL DE TENSÕES PRINCIPAIS



## 5.2.10 Avaliação da estabilidade dos modelos

Modelos com elevado número de elementos são indesejáveis devido ao custo computacional, entretanto modelos como o disposto em Lehmann, Elias e Gouvêa (2004) apontaram para simulações com malhas de 50.000 elementos e oito volumes independentes.

O presente trabalho, contou com variação de 5 a 8 tipos de materiais: esmalte, dentina, polpa, cimento, ligamento periodontal, osso cortical (e alveolar), osso esponjoso e material auxiliar, identificando as áreas próprias para cada tipo de tecido e sutilezas dos contornos.

Todas as malhas no presente trabalho contaram com números entre 3.412 (mínimo) e 4.961 elementos (máximo), modelos CIM1 e CIM5, respectivamente. Os mesmos modelos CIM1 e CIM5 responderam pelas simulações computacionais aparentemente mais desfavoráveis, seja pela falta de detalhamento de tecidos ocasionado pelos elementos quadrangulares, no primeiro caso, seja pela deficiência na distribuição de tensões para a parede óssea lingual provocado pelo descolamento das superfícies de contato, no segundo caso.

Conquanto a variedade de materiais não tenha permitido a utilização do recurso do cálculo de percentual de erro disponível no ANSYS, a convergência das malhas foi acompanhada em cada incremento no número de elementos.

Os modelos ensaiados mostraram capacidade de absorver pequenas variações nos parâmetros.

Algumas instabilidades foram detectadas nos modelos, como regiões com término em ângulos agudos ou de dimensões muito pequenas dificultando a geração de malhas, porém mantidas com o intuito de garantir maior identidade com as propriedades de migração de um tecido para outro em suas regiões proximais.

Nas instabilidades citadas, a variação em malha apontou, em algumas situações, para picos de tensão irreais em determinados nós que, se tomados na média dos elementos a que estavam atrelados, apontariam para tensões mais condizentes. Tais valores de tensão demandaram maior cuidado com relação a observação de possíveis falhas nos pontos de geração da malha, inclusive avaliando se algumas simplificações na geometria comprometeriam os resultados.

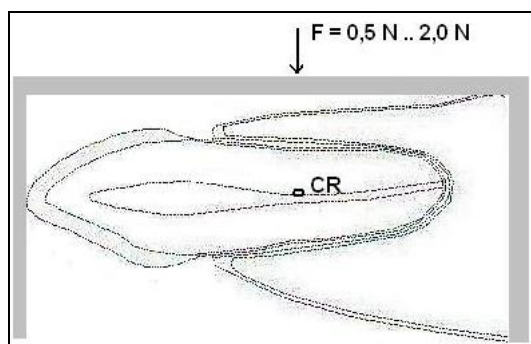
Mesmo para os modelos com não-linearidades, a convergência foi alcançada com poucos passos e sub-passos de carga, em geral 1 passo e 15 sub-passos.

### 5.2.11 Abordagem não-linear para módulos de elasticidade do ligamento periodontal

O ligamento periodontal é freqüentemente modelado com módulo de elasticidade constante. As características dos materiais envolvidos no ligamento apontam, entretanto, para um comportamento mais dinâmico frente à variação de cargas, principalmente quando considerados os aspectos viscoelásticos inerentes a sua composição dependente de materiais altamente irrigados.

Yoshida *et al.* (2001), trataram a translação do dente no sentido vestibulo-lingual, com cargas variando de 0,5 N a 2,0 N (FIGURA 5.46), aplicadas ao centro de rotação (CR) do sistema e propondo uma formulação não linear para o ligamento periodontal.

FIGURA 5.46: MODELO COM RESTRIÇÃO IMPOSTA E CARGA APLICADA



Considerando o artigo acima, foi apresentada uma formulação do módulo de elasticidade do ligamento periodontal (LP) como sendo

$$E_y = \left[ \frac{Wl}{2A\lambda} \right] \quad (5.3)$$

onde

$E_y$  é módulo de elasticidade;

$W$  refere-se à carga;

$l$  é a espessura do LP antes da carga;

$A$  é a área da seção transversal do LP;

$\lambda$  é a mudança de espessura no LP;

$\frac{1}{2}$  refere-se ao fato de haver duas camadas de ligamento entre a raiz e o osso, uma sofrendo compressão e a outra, tensão.

A tabela 5.10, abaixo, apresentou os valores disponibilizados no artigo em questão.

TABELA 5.10: DADOS SEGUNDO O ARTIGO DE REFERÊNCIA

Indivíduo	Comprimento Raiz	Distância CRE ao APEX	Deslocamento de translação ( $\mu\text{m}$ )			
			0.5N	1.0N	1.5N	2.0N
1	13,3	8,4	4,4	6,9	8,3	9,1
2	14,7	9,8	5,9	9,0	10,4	11,1

No ensaio efetivado em MEF, porém, para a satisfação das medidas encontradas experimentalmente no artigo, necessitou-se do seguinte ajuste iterativo

$$E_y^{k+1} = \left[ \frac{Wl}{2A\lambda} \right] \times E_y^k \quad (5.4)$$

que indicou que o módulo de elasticidade em questão dependia do módulo de elasticidade no passo de carga anterior.

Outra proposição cabível ao modelo foi a substituição do termo iterativo, na expressão dada em (5.4), por um termo exponencial (condizente com a curvatura original dada no artigo), assumindo a seguinte configuração:

$$E_y^{k+1} = \left[ \frac{Wl}{2A\lambda} \right] \times e^{w-0,5} \quad (5.5)$$

com  $w$  variando de 0,5 a 2,0. o resultado dessa expressão exponencial assumiu os seguintes valores:



$$\begin{aligned}
e^{0,5-0,5} &= e^0 = 1 = (1,6487)^0 \\
e^{1,0-0,5} &= e^{0,5} = 1,6487 = (1,6487)^1 \\
e^{1,5-0,5} &= e^{1,0} = 2,71828 = (1,6487)^2 \\
e^{2,0-0,5} &= e^{1,5} = 4,48168 = (1,6487)^3
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Note-se, entretanto, a constante 1,6487 é um valor aproximado do número  $\Phi = 1,61803$ , ou seja, da constante utilizada para explicitar a razão áurea, conhecida desde a antiguidade por aparecer em proporções de diversos organismos encontrados na natureza (DOCZI, 1990), tal que:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \tag{5.7}$$

E que gera as soluções:

$$\begin{cases} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803 \\ \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,61803 \end{cases} \tag{5.8}$$

Com a propriedade:

$$\Phi \times \Phi' = -1 \tag{5.9}$$

A equação dada em (5.5), escrita com a substituição do termo exponencial pelo termo áureo, passou a ser expressa por:

$$E_y^{k+1} = \left[ \frac{Wl}{2A\lambda} \right] \times \Phi^k \tag{5.10}$$

Tal situação não é absurda, visto que a razão áurea aparece naturalmente em situações envolvendo componentes orgânicos. É possível que o ligamento periodontal, com suas fibras, matriz e cristais enquadre-se nessa categoria.

As proposições foram implementadas no aplicativo ANSYS gerando uma série de arquivos denominados NORIAKIXX, onde XX é um sufixo numérico que indica o passo de carga variando de 0,5 N a 2,0 N (Tabela 5.8) e o nome NORIAKI guarda relação com o artigo de Yoshida Noriaki *et al.* (2001).

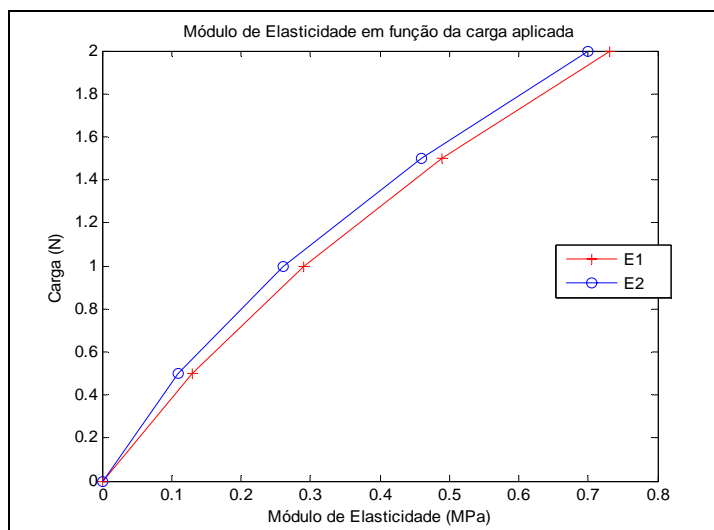
TABELA 5.11: RESULTADOS OBTIDOS NO MEF:

Modelo	Deslocamentos nos nós (μm)	Ey	Propriedades do
--------	----------------------------	----	-----------------

	Nó 198	Nó 4905	(MPa)	Módulo $E_y$
NORIAKI05	3,19	3,14	0,3	Valor fixo
NORIAKI10	6,3	6,29		
NORIAKI15	9,59	9,44		
NORIAKI20	12,79	12,59		
NORIAKI05	7,9	3,62	0,12	Gradual Iterativo
NORIAKI10	6,9	6,35	0,275	
NORIAKI15	6,07	9,09	0,475	
NORIAKI20	5,40	11,85	0,715	
NORIAKI05	7,97	3,62	0,12	Gradual exponencial
NORIAKI10	7,52	6,4	0,255	
NORIAKI15	5,39	9,02	0,535	
NORIAKI20	3,56	11,67	1,088	
NORIAKI05	7,97	3,62	0,12	Gradual em $\Phi$
NORIAKI10	7,63	6,42	0,251	
NORIAKI15	5,59	9,04	0,516	
NORIAKI20	3,77	11,69	1,028	

Para melhor visualização e comparação dos resultados, foi organizada uma seqüência de gráficos com intuito de mostrar a sutileza das curvas propostas no artigo e aquelas obtidas nos ensaios computacionais.

FIGURA 5.47: CURVATURAS CARGA X MÓDULOS DE ELASTICIDADE  
PROPOSTAS POR YOSHIDA *ET AL.* (2001)



Apesar da suavidade das curvas apresentadas, ficou flagrante a mudança de comportamento para novos ensaios de modelos dentários, inclusive na forma de como alimentar o sistema com módulos incrementados gradualmente.

A curva de carga-deslocamento (FIGURA 5.48), apontou para um crescimento exponencial, contrariando o tradicional comportamento de materiais elásticos, porém, muitos estudos *in vivo* examinaram o efeito de diferentes padrões de cargas no deslocamento dentário e demonstraram que a resposta do dente a baixos valores de carga (<20 N) é não-Hookeana (REES & JACOBSEN, 1997).

Dorow, Krstin & Sander (2001) e Krstin *et al.* (2001), examinando as propriedades viscoelásticas do ligamento periodontal, concluíram que a curva da força de deflexão era inicialmente não-linear, com um crescimento exponencial, seguida de uma região linear para grandes deflexões.

Li *et.al* (2004), justificando tal perfil para a curva não-linear, comentaram sobre uma diferença de comportamento apresentada no começo do processo de carga, durante o experimento. Segundo o autor, a força inicial estaria agindo para eliminar a lacuna no contato (*GAP*). Tal fenômeno persistiria até o fechamento do *GAP*, pelo contato. Subseqüentemente, o processo tomaria uma relação linear.

Gei, Genna & Bigoni (2002), também avaliando a não-linearidade sob a ótica de contato, comentaram a presença de termos de não-convexidade nas funções de potencial, salientando que as soluções do problema de valor de contorno poderiam não ser únicas. A curva apresentada pelos autores refez o mesmo perfil da figura 5.48, porém para valores de referência diferentes dos constantes neste trabalho.

Provatidis (2000), analisando a viscoelasticidade do ligamento e a respectiva curvatura não-linear, rotulou o movimento ortodôntico do dente como sendo um fenômeno de *creep*, seguindo, assim, uma lei exponencial.

FIGURA 5.48: CURVATURAS CARGA X DESLOCAMENTOS PROPOSTAS

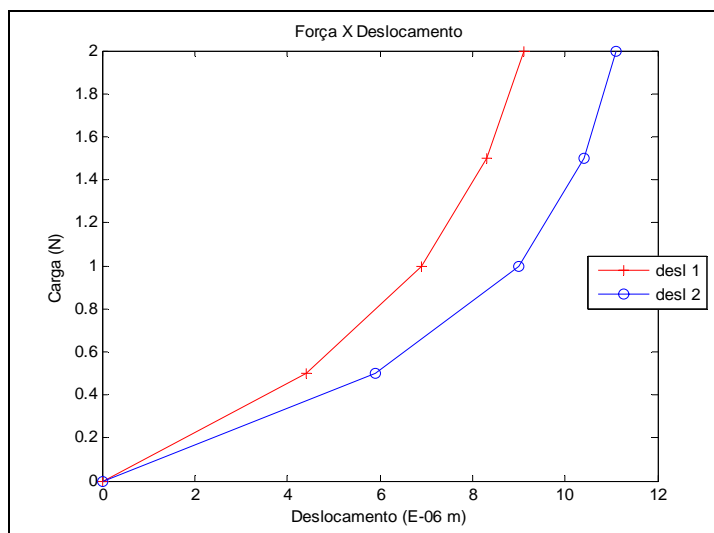
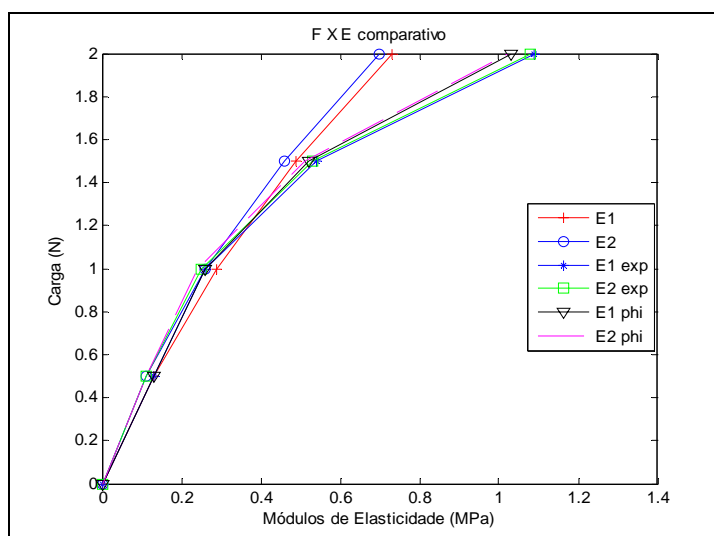


FIGURA 5.49: COMPARATIVO ENTRE OS MÓDULOS PROPOSTOS

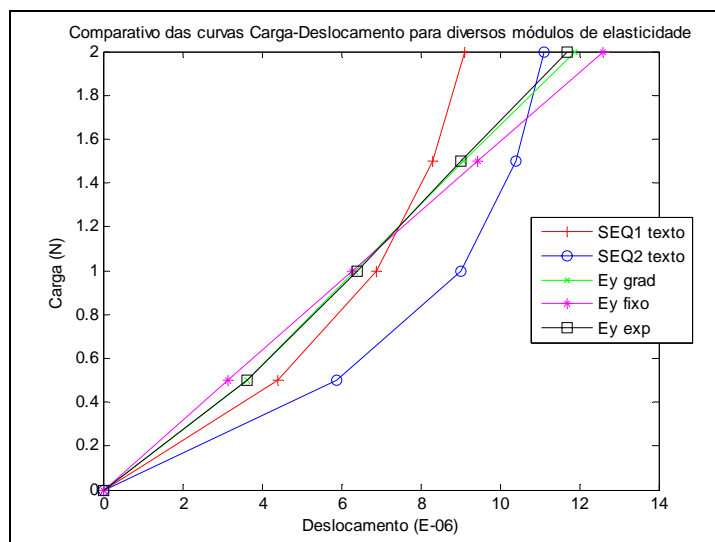


Apesar da proximidade das curvas obtidas, tais proposições, porém, demonstraram ser bem comportadas para tensões de pequeno valor (até 5 N, por exemplo). Com valores significativos de tensão, como os ensaios de Albuquerque *et al.* (2003) que apontam para cargas de 100 N, o módulo de elasticidade calculado por esse processo iterativo obteve valores excessivamente altos.

A avaliação feita desse processo apontou para a necessidade de continuidade na busca por outras variáveis de controle que ajudem na

representação do mesmo, haja vista que o módulo de elasticidade não teria como aumentar infinitamente, sugerindo, assim, que algum outro processo de interrupção das iterações deveria estar presente.

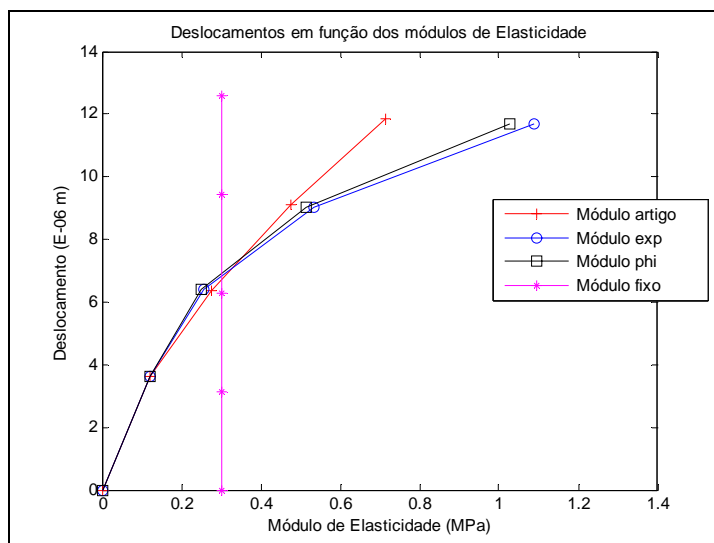
FIGURA 5.50: DESLOCAMENTOS EM UM NÓ DE CONTROLE (NÓ 4905)



Observe-se na imagem acima a presença de uma linha reta representando a curvatura para um valor fixo de Módulo de Elasticidade, ou seja, os modelos atuais de ligamento a coeficiente constante, apesar do módulo aqui considerado (0,3 Mpa) ser de um décimo do valor considerado nos ensaios relacionados nas seções 5.7 a 5.9 (0,003 GPa). Em contraponto às duas curvas mais acentuadas representantes do ensaio proposto no artigo de referência e os resultados obtidos para módulos de elasticidade não-lineares. Esses últimos apresentaram uma suavidade maior para as curvas de deslocamento dentro do espectro de cargas avaliado.

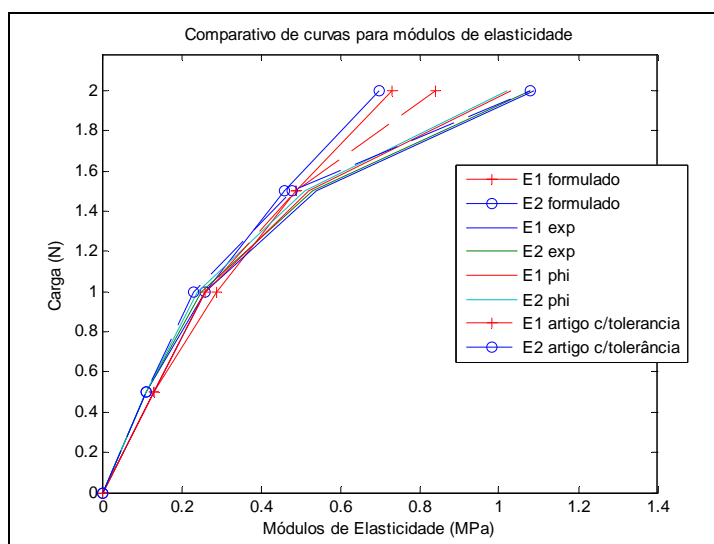
Os ensaios considerando a formulação exponencial ou utilizando o fator  $\Phi$  demonstraram um comportamento muito semelhante. A curva obtida pela formulação original do artigo foi razoavelmente acompanhada pelas proposições exponenciais e com o fator  $\Phi$ . Em todas as situações a única discrepância no resultado foi a curva apresentada para um módulo de elasticidade constante (FIGURA 5.51).

FIGURA 5.51: COMPARATIVO DESLOCAMENTO X MÓDULO DE ELASTICIDADE



Apesar de haver ocorrido um distanciamento nos valores apurados no presente trabalho, comparativamente àqueles do artigo de referência para a faixa de 1,5 e 2,0 N de carga, observou-se que mesmo a formulação pretendida (5.1) só verificava os resultados descritos no artigo se consideradas as margens de tolerância, em especial nessa região crítica ( $\pm 21,74\%$ ). Sob essa consideração, foi possível verificar que os perfis das curvas tornaram-se compatíveis com os resultados obtidos nos modelos ensaiados computacionalmente (FIGURA 5.52).

FIGURA 5.52: MÓDULOS CONSIDERANDO TOLERÂNCIA DE 21,74%



## 5.2.12 Extensão dos resultados

O conceito de trabalhar com um módulo de elasticidade não-linear foi estendido para o artigo de Provatidis (2000) e utilizado o modelo CIM3 como referência no ANSYS para simulação computacional dos resultados, estando os valores utilizados pelo autor, relacionados na tabela 5.12, abaixo:

TABELA 5.12: PARÂMETROS PARA MODELAGEM

Mód Elast	Espessura	Comprimento da raiz	Área	$\nu$	deslocamento	Força
0,68 MPa	0,229 mm	13,0 mm	-	0,49	5,0 $\mu\text{m}$	1,00 N
0,68 MPa	0,229 mm	13,0 mm	-	0,45	20,0 $\mu\text{m}$	1,82 N

O valor de área considerado, em virtude da não informação no artigo, foi de  $0,55 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  visto que as dimensões do comprimento da raiz e espessura foram bastante próximas do modelo gerado no ANSYS, ou seja, 12,9 mm de comprimento da raiz e 0,2 mm de espessura, permitindo a utilização de uma área comum.

Considerando a formulação proposta em (5.10),

$$E_y^{k+1} = \left[ \frac{Wl}{A\lambda} \times 0,5 \right] \times \Phi^k$$

onde

$$k = \frac{W}{0,5} - 1, \quad (5.11)$$

obteve-se

$$E_y^{k+1} = \left[ \frac{1,0 \times 0,229 \times 10^{-3}}{0,55 \times 10^{-6} \times 5,0 \times 10^{-6}} \times 0,5 \right] \times \Phi^{\left( \frac{1,0}{0,5} - 1 \right)} \quad (5.12)$$

e

$$\boxed{E_y^{k+1} = 0,67 \text{ MPa}} \quad (5.13)$$

O modelo matemático utilizado, a menos dos erros provocados por arredondamentos de máquina, aproximou o módulo de elasticidade utilizado pelo autor que era de 0,68 MPa. A repetição dos cálculos, para a carga de 1,82 N e deslocamento de 20  $\mu\text{m}$  também alcançou o módulo de elasticidade de 0,67 MPa,

sugerindo que o modelo proposto conseguiu retratar os pares carga e deslocamento (Tabela 5.12) sugeridos no artigo.

Os resultados obtidos do modelo proposto foram simulados no aplicativo ANSYS tendo gerado os seguintes resultados para os nós selecionados em região similar ao texto de referência e em destaque nas figuras 5.53 a 5.56.

FIGURA 5.53: DESLOCAMENTOS OBTIDOS - CARGA 1N;  $\nu=0,49$

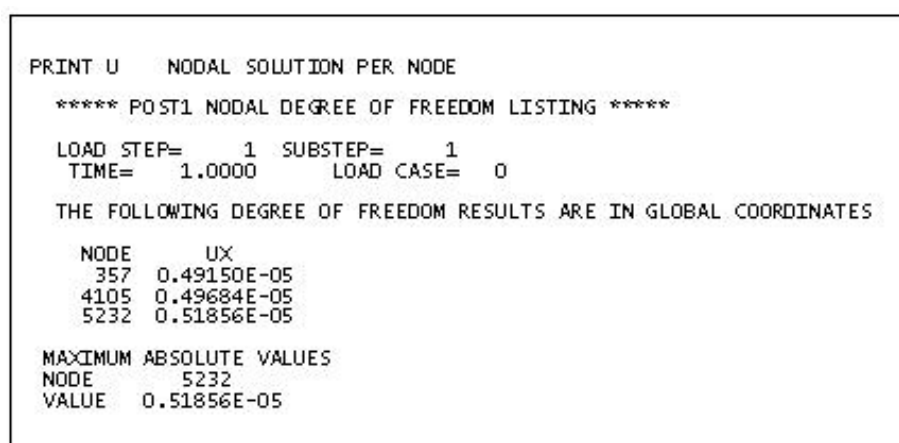
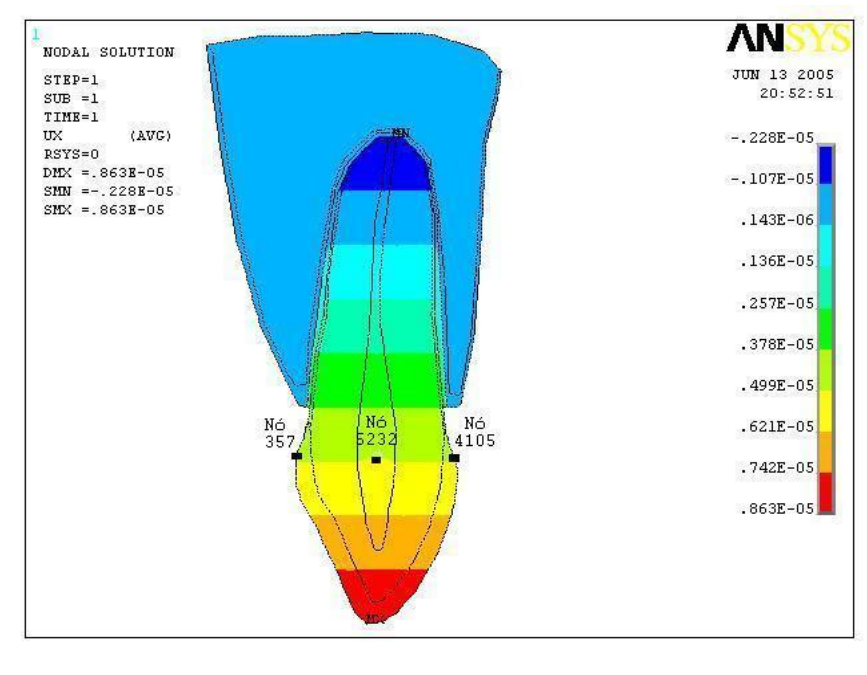


FIGURA 5.54 – ENSAIO DO MODELO PROVATIDIS – CARGA 1N;  $\nu=0,49$





Os nós tomados para controle apresentaram deslocamento compatíveis com a formulação proposta em (5.12) e tabela 5.12, ou seja, deslocamento de 5,0  $\mu\text{m}$ .

Na seqüência dos ensaios constatou-se que a manutenção do mesmo coeficiente de Poisson não garantia o desempenho dos modelos. Mesmo no artigo original não foi considerado um mesmo coeficiente. Os valores propostos para deslocamento de 20,0  $\mu\text{m}$  foram alcançados com coeficiente de Poisson de 0,475 e não 0,49 como o original do artigo.

FIGURA 5.55: DESLOCAMENTOS OBTIDOS - CARGA 1,82N;

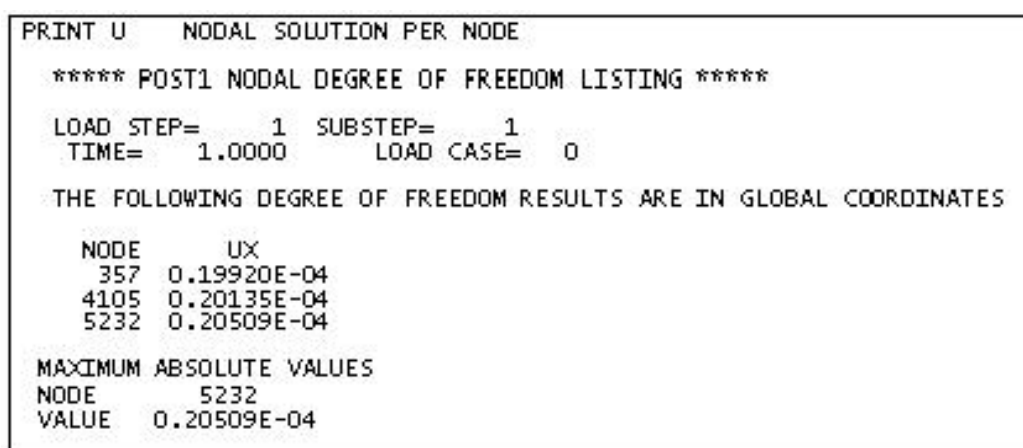
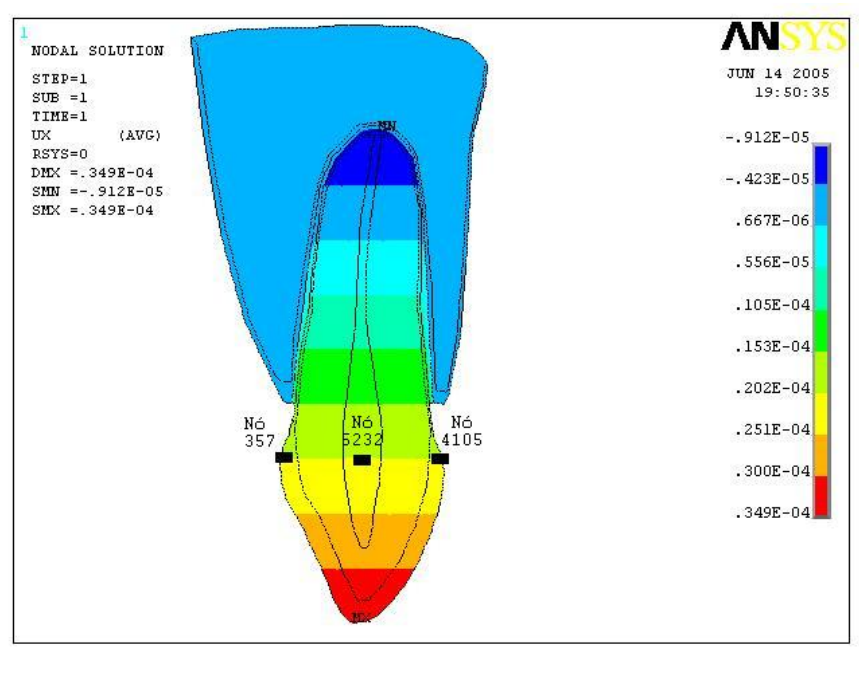


FIGURA 5.56: ENSAIO DO MODELO PROVATIDIS – CARGA 1,82 N;  $\nu=0,475$



## 5.3 Análise dos resultados

O presente trabalho tratou da simulação computacional de modelos dentários, utilizando o Método dos elementos finitos, com o objetivo de avaliar o comportamento do tecido denominado ligamento periodontal.

As análises visaram atender a dois questionamentos freqüentes quando da simulação computacional de elementos dentários: quais as formulações matemáticas que melhor atendem à simulação do comportamento biomecânico da componente ligamento periodontal e qual o módulo de elasticidade a ser utilizado, haja vista a diversidade de informações e indefinição quanto à matéria.

A fim de atender aos referidos questionamentos, foi estabelecida uma comparação e avaliação qualitativa entre três diferentes formulações usualmente empregadas para as simulações e a investigação de uma proposição não-linear para a estimativa de valor do ligamento periodontal.

Apesar dos resultados obtidos com o elemento de mola terem indicado uma representação mais adequada do processo de ensaio do dente a cargas, muitas informações e parâmetros precisariam ser agregados aos ensaios, inclusive a possibilidade de manuseio com modelos reais de dentes, compatíveis com o esquema proposto, a fim de possibilitar a comparação direta desses resultados.

Os resultados obtidos para as tensões de Von Mises demonstraram um comportamento bastante razoável se observado que no elemento de estado plano houve distribuição de tensões para todos os ossos, enquanto no ensaio considerando elementos de mola, parte das tensões foi transferida visto que há ocorrência de *gap* interferindo na continuidade da distribuição das mesmas e resultado das tensões foi superior ao obtido para o estado plano. Na formulação com elementos de contato, o *gap* é acompanhado de total descolamento do dente em relação ao osso, conseqüentemente interrompendo a transmissão de tensões de uma superfície à outra. Os resultados para a tensão de Mises no contato foram as maiores dos três modelos.

Compare-se os diagramas de tensões de Mises com a respectiva distribuição de tensões principais (FIGURAS 6.1 e 6.2). Para a montagem da figura 6.1 a paleta de cores foi graduada de maneira igual para as três figuras, exceção feita ao último

valor de cada um dos ensaios que refletem extremos de tensão diferenciado para cada caso, conquanto estivesse presente o descolamento de tecidos como no caso de contato, descolamento parcial no caso de mola e deformação sem descolamento no caso do elemento de estado plano.

FIGURA 5.57 – COMPARATIVO DAS TENSÕES DE MISES

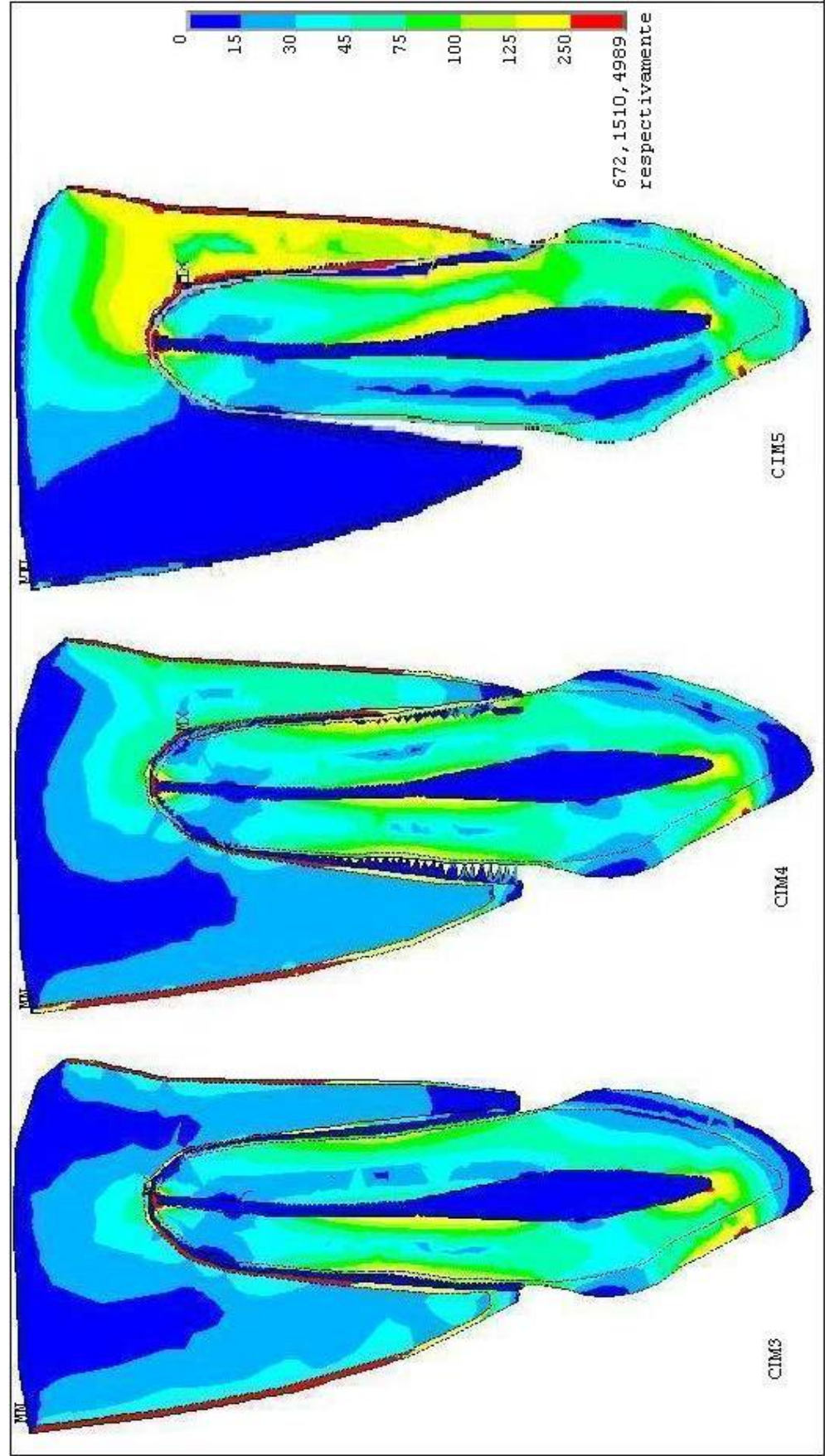
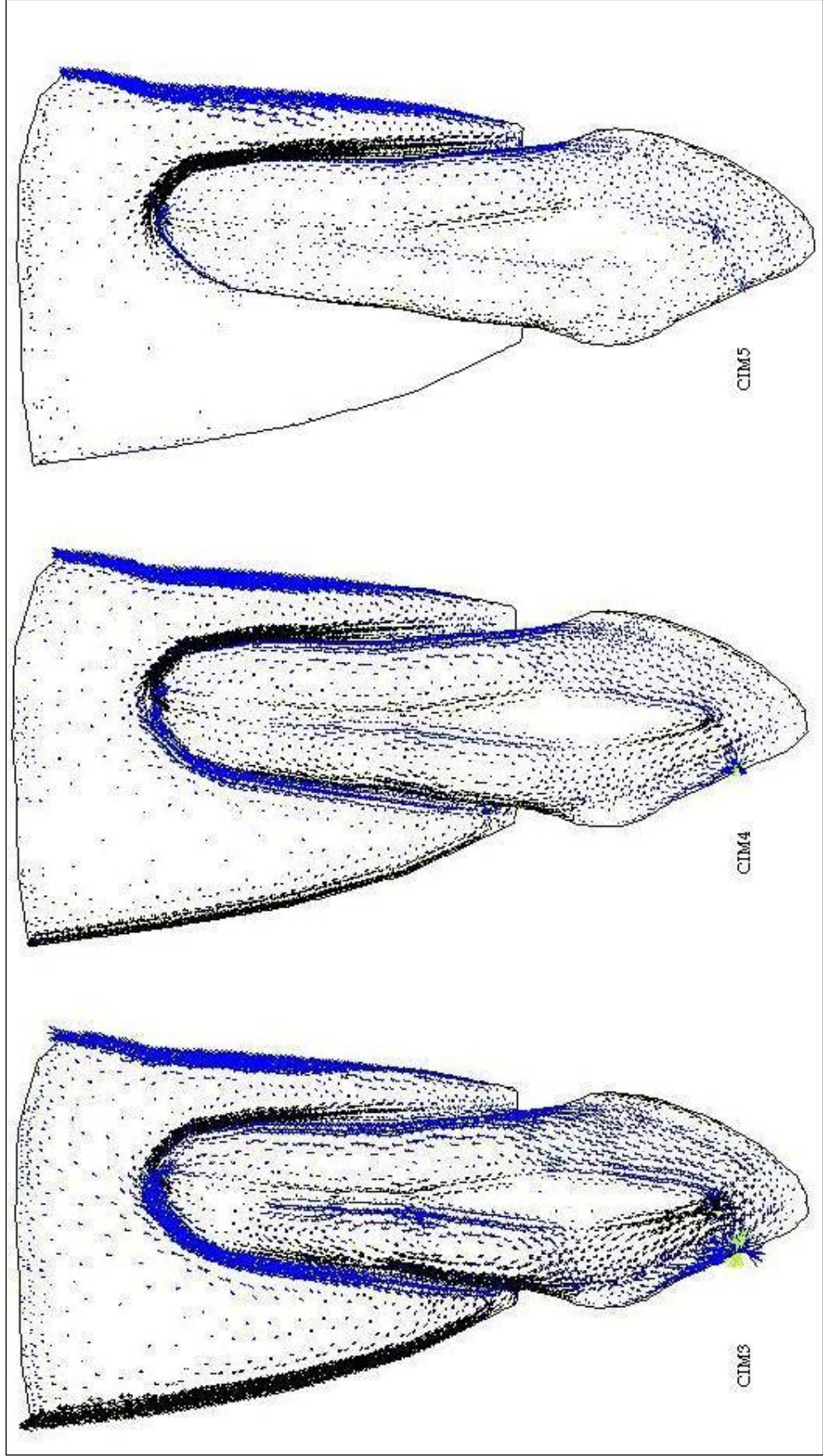


FIGURA 5.58 – COMPARATIVO DAS DISTRIBUIÇÕES DE TENSÕES PRINCIPAIS





No tocante a abordagem não-linear do ligamento periodontal, a avaliação efetuada no presente trabalho objetivou apresentar uma discussão sobre resultados apresentados em alguns artigos, quanto à tendência de crescimento exponencial do módulo de elasticidade.

Com o propósito de investigar tal não-linearidade, foi estabelecido um modelo empírico para a representação da curvatura exponencial. Os resultados apresentados, conquanto não permitam afirmar tratar-se de um modelo definitivo, salientou a necessidade de continuação de verificações mais elaboradas, inclusive quanto a simulação no ANSYS considerando formulações não-lineares.

### **5.3.1 Simulação com elementos de estado plano**

A primeira proposição tratou o ligamento como um meio contínuo. Tal hipótese é sustentável se avaliada sob a observação de que a quantidade de fibras e outros materiais da região de interface entre osso alveolar e cimento, tendem a preencher esse espaço, anulando as lacunas possíveis, ou minimizando-as. Mesmo materiais considerados contínuos poderiam ser re-classificados se observados sob uma ótica microscópica.

As simulações alcançaram valores funcionais visto terem conseguido reproduzir com satisfatório grau de compatibilidade os ensaios realizados por outros autores.

A série de modelos denominados ALB, onde o ligamento periodontal foi totalmente desconsiderado e o sistema dentário tratado como uma seqüência de materiais de propriedades semelhantes, demonstrou uma possibilidade de distribuição de tensões uniformes, porém não compatíveis com a consideração teórica da capacidade de absorção e redistribuição de cargas do ligamento para a ossatura de suporte, inclusive não observando que os módulos de elasticidade no corpo dentário caem bruscamente a partir do cimento (14,0 GPa) para o ligamento periodontal (0,003 GPa), tornando a subir abruptamente para o osso alveolar (13,7 GPa).

O modelo CIM3, o primeiro com simulação do ligamento e considerando um elemento plano de formulação quadrática para os deslocamentos, permitiu recriar

um comportamento similar ao da literatura consultada: as tensões foram absorvidas no ligamento, enquanto as maiores deformações passaram a ser encontradas dentro da região do ligamento que possui as características físicas suficientes para tal, aliviando a ossatura e o próprio dente.

A facilidade de simulação com elementos planos triangulares quadráticos como apresentado com o modelo CIM3 denotaram a funcionalidade da utilização dessa formulação matemática para a conformação de regiões de geometria complexa.

Uma desvantagem apresentada para a simulação com elementos planos residuiu no caráter de continuidade das superfícies, ou seja, as áreas correspondentes a materiais diversos, estão vinculadas de tal forma que o movimento de uma área implica no movimento conjunto das demais. Tal situação não reflete a possibilidade de giro do dente dentro do alvéolo com conseqüente aparecimento de *gap* e contato. Em decorrência há um giro do alvéolo e do modelo dentário como um todo, tendo gerado, no exemplo simulado, altas tensões de tração na parede óssea cortical lingual.

### **5.3.2 Simulação com elementos de mola**

A simulação com elementos de mola apresentou deficiências decorrentes da ausência de parâmetros confiáveis para a simulação, tais como dificuldades no estabelecimento de um número adequado de fibras e suas respectivas orientações.

O ensaio com elementos de mola conseguiu demonstrar a tendência ao giro provocada pela ação da carga aplicada e o *gap* apresentado em função do giro. A distribuição de tensões apresentou um comportamento mais equilibrado quanto a inversão das áreas em tração e compressão. As deformações também foram representadas em seus aspectos de máxima e mínima dentro da região do ligamento, acompanhando o descolamento das superfícies, mas mantendo-se a vinculação das mesmas pelos elementos de mola.

Uma consideração que se impôs foi a questão de observar-se a interpenetração de superfícies, visto que as estruturas precisavam ser mantidas e recuperadas quando da retirada de cargas. Tal princípio é condizente com a

proposta de resguardo das distâncias interatômicas<sup>28</sup> bem como atendimento das condições de equilíbrio previstas pelo fator energia de ligação<sup>29</sup>.

As estruturas presentes na interface do ligamento, quando sob compressão, tenderam para a diminuição dos espaços interatômicos, tendo adquirido, ainda que momentaneamente, um comportamento mais compacto.

Tal situação deve justificar o fato de, nos ensaios não-lineares a curvatura ter comportamento exponencial. Enquanto as componentes permitiram a compressão a estrutura pôde se auto-organizar e responder com um aumento no módulo de elasticidade. No entanto, dada a limitação da capacidade de contrair-se, a partir desse limite a energia de ligação acumulada passou a ser liberada<sup>30</sup>.

As desvantagens apresentadas no modelo computacional, além da ausência de parâmetros suficientes, residiram na geração da geometria do modelo, onde a colocação das molas demandou um trabalho significativamente mais complexo que a utilização do elemento de estado plano e na necessidade de utilização de um material auxiliar para viabilizar a existência de áreas contínuas para a vinculação da mola.

Entretanto, o material auxiliar, visto sob outro enfoque poderia vir a tornar-se a simulação dos parâmetros da matriz do tecido conjuntivo.

### 5.3.3 Simulação com elementos de contato

A terceira formulação apresentada baseou-se na teoria do contato entre duas superfícies onde a consideração do movimento do dente sob carga levaria-o a transpor o *GAP* entre o cimento e o osso alveolar proporcionando o contato entre parte das estruturas.

O contato puro apresentou uma tendência para a translação de corpo rígido do dente devido à ausência de vínculo entre o dente e o alvéolo. O problema foi sanado pela simulação conjunta com uma superfície auxiliar como a apresentada no modelo com elementos de mola.

---

<sup>28</sup> Capítulo 3 – subseção 3.3.3.

<sup>29</sup> Capítulo 3 – subseção 3.3.4.

<sup>30</sup> Capítulo 3 – subseções 3.3.4 e 3.3.8.



O ganho apresentado na formulação com contato residiu na possibilidade de tratar o contato, visualizando o que estaria acontecendo no interior da interface. O *GAP* máximo foi alcançado na região cervical lingual o que concorda com a direção e sentido impostos pela carga aplicada, coincidindo, inclusive, com o resultado apresentado pelo elemento de mola. Outra possibilidade delineada pelo elemento de contato foi a visualização das áreas onde ocorrem deslizamentos entre as estruturas.

Também estão representados os acúmulos de pressão sobre determinadas superfícies e as potenciais penetrações entre as mesmas, o que em um caso real implicaria em regiões tendentes a reabsorção óssea, dado que, segundo Kavarizadeh *et al.*, 2004, tensões compressivas e deformações normais negativas correlacionam-se com zonas de absorção óssea onde o número de núcleos osteoclásticos é mais alto.

Doblaré, García & Gracia (2000) expuseram sobre remodelagem da superfície óssea. Para tal, consideraram uma região convexa na qual verifica-se a condição de mínima dissipação mecânica (não requer aporte metabólico), ou seja, condição oposta a mecânica do dano que supõe o cumprimento do princípio de máxima dissipação. A consideração acima apontou para uma diferença essencial entre o comportamento dos materiais porosos (inertes) e materiais biológicos ativos (adaptativos) que intentam minimizar a dissipação mecânica: materiais porosos produzem a liberação de energia pelo aparecimento de microfissuras nas zonas mais solicitadas, ou seja, submetidas a maior energia de deformação, enquanto a reabsorção se produz nas zonas de menor energia de deformação. No caso de aposição óssea, a dissipação produzida é negativa devido ao fato de necessitar-se de aporte de material energético metabólico.

Apesar das funções de forma do elemento de contato serem lineares, o comportamento do contato assume uma configuração não-linear. Contribuíram para tal a incorporação de atrito e deslizamentos entre superfícies.

A desvantagem apresentada para a formulação com elementos de contato foi o total descolamento do dente ao osso, nas situações em extremos de tração, fato que não corresponde à realidade do evento de giro visto que as fibras do ligamento não o permitem. Como consequência, as tensões não foram distribuídas para a parede óssea cortical da região lingual, da maneira esperada.

### 5.3.4 Abordagem não-linear para módulos de elasticidade do ligamento periodontal

Após a avaliação das formulações matemática para a interface, procedeu-se a investigação de uma proposição não-linear para a estimativa do módulo de elasticidade do ligamento periodontal, posto que essa não-linearidade do ligamento tem sido observada por diversos autores, principalmente quando da consideração das características viscoelásticas da interface.

Tendo como referência inicial o modelo proposto em Yoshida *et al.* (2001) procedeu-se a uma investigação do impacto de cada componente no modelo e a verificação dos efeitos gerados nas simulações em elementos finitos.

Os resultados foram acompanhados tendo como referência outros artigos como Rees & Jacobsen (1997), Dorow, Krstin & Sander (2001), Krstin *et al.* (2001), Li *et al.* (2004), Gei, Genna & Bigoni (2002) e Provatidis (2000), o que salientou a constância nas pesquisas sobre a compreensão do comportamento da curvatura relativa ao módulo de elasticidade do ligamento periodontal, bem como na forma de explicitá-la matematicamente.

Conquanto os resultados apresentados no presente trabalho tenham indicado uma possibilidade de modelagem, ainda que empírica, a continuação dos estudos se faz necessária para que os exemplos obtidos a partir da adaptação de formulações lineares sejam totalmente refeitos no aplicativo ANSYS utilizando-se materiais de comportamento originalmente não-lineares, bem como aprofundar o conhecimento na contribuição das diversas componentes do modelo a fim de viabilizar uma formulação teórica para o mesmo.

## Capítulo 6

### Conclusões e sugestões de continuidade

#### 6.1 Conclusões

O presente trabalho conquanto visasse responder aos questionamentos quanto a indicação da melhor formulação matemática para representar a simulação do ligamento periodontal, dentre as três avaliadas: elemento de estado plano, elemento de mola e elemento de contato, obteve resultados qualitativos sobre os mesmos, estando a parte quantitativa prejudicada pela ausência de ensaios físicos correlatos ao modelo computacional assumido.

Apesar da avaliação ser de cunho qualitativo, o comportamento do ligamento obteve representação mais condizente com a realidade do evento de submissão a cargas no modelo considerando elementos de mola para a geração da interface.

O giro, o *gap*, a distribuição dos vetores de tensões principais, o comportamento apresentado nas deformações, a distribuição das tensões de Von Mises; todos apresentaram um comportamento razoável quanto a expectativa de funcionamento do sistema dentário, para o dente, carga e restrições impostas.

No entanto, apesar de o modelo de elementos planos ter obtido resultados sob a consideração de superfícies contínuas entre dente, ligamento periodontal e osso, contrariando a realidade física do problema, não se deve descartar a utilização

de tais elementos uma vez que a magnitude dos erros impostos podem estar dentro de margens aceitáveis para diversas categorias de problemas. Tais resultados têm sido apontados na literatura como condizentes com experimentos de laboratório. Além disso, a facilidade operacional de tais elementos tem proporcionado sua aceitação nos ambientes de simulações computacionais.

Situação semelhante foi apresentada pelo modelo de contato. Apesar da excelente representação dos fenômenos de *gap*, giro, deslizamento e penetração, o que não é tão imediato para as outras formulações, houve um descolamento total do dente em relação à parede óssea adjacente quando do giro, com conseqüente alteração na distribuição de tensões e deformações.

O que os resultados indicaram foi a possibilidade de privilegiar algum específico aspecto quando da análise, desde que se tenha claro o tipo de erro no qual a opção pode incorrer.

A utilização de um material auxiliar a fim de viabilizar a geração dos modelos computacionais com elementos de mola e de contato sugeriu a condição de vir a tratar esse meio como sendo pertinente a matriz do tecido conjuntivo.

Além da avaliação das proposições acima, também a análise de uma abordagem não-linear foi avaliada. Os resultados, bem como os modelos propostos trouxeram uma consideração do ligamento periodontal não como um material com constantes definidas, ao contrário, que o mesmo tenha a capacidade de assumir valores diferenciados quando sob condições diferentes de cargas.

O modelo matemático alcançado para o ligamento não vem a ser proposto como instrumento de uso na determinação do módulo de elasticidade do ligamento periodontal, ao contrário deve ser encarado como uma formulação que deve ser avaliada em novas simulações quanto a sua correlação com materiais originalmente não-lineares, além de buscar-se o seu respaldo teórico.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Dado que o presente trabalho não esgotou, nem teve a pretensão, a busca por modelos mais adequados para o sistema dentário e para o ligamento periodontal, os mesmos devem continuar sendo objeto de constantes avaliações.

Dentre as sugestões possíveis para trabalhos futuros enquadram-se:

1. Elaborar modelos computacionais utilizando novos e diferenciados elementos de mola, de contato e de estado plano;
2. Complementar os dados referentes às propriedades dos materiais envolvidos, principalmente para o elemento de mola;
3. Investigar as propriedades da matriz e de como implementá-la em um ambiente conjugado com o ligamento periodontal,
4. Considerar os aspectos viscoelásticos dos materiais;
5. Abordar simulações computacionais do ligamento com módulos de elasticidade diferenciados para a tração e compressão;
6. Implementar simulações tridimensionais;
7. Idealizar um elemento específico para representar o comportamento adequado do ligamento;
8. Aprofundar a discussão quanto à abordagem não-linear do ligamento periodontal;
9. Determinar as variações impostas pelo tipo de dente sob estudo;
10. Aperfeiçoar o processo de migração da imagem dentária para as simulações computacionais;
11. Avaliar a interferência da geometria dos modelos computacionais posto que é usual que alguns autores trabalhem com dentes de contornos idealizados.

## Glossário

**ADSORÇÃO** - Processo de ligação ou retenção de moléculas ou íons nas superfícies de partículas sólidas, principalmente argilosas.

**ALVÉOLO** - Qualquer pequena cavidade ou depressão; Cavidade na apófise alveolar, na qual se encaixa a raiz de um dente.

**ANISOTROPIA** – Variação de propriedades físicas segundo as variações direcionais de ensaio de cargas.

**APICAL** - Relativo ao ápice; ponta.

**CERVICAL** - Relativo ao pescoço (Coluna).

**CERVICOINCISAL** - Região inicial e estreita de um órgão.

**COLÁGENO** - Proteína fibrosa insolúvel, principal constituinte das fibrilas de tecidos conectivos. Dilatam-se em soluções aquosas.

**CÔNDILO** - Saliência articular de um osso, arredondada de um lado e achatada do outro.

**CÚSPIDE** - Eminência de esmalte na face triturante de um dente.

**DISTAL** - Extremidade mais afastada do ponto que se liga ao corpo; direita.

**ESTOMATOGNÁTICO** - O Sistema Estomatognático, é composto por ossos, dentes, articulação temporo-mandibular, músculos, sistema vascular e nervoso e espaços vazios.

**FIBROBLASTOS** - Célula mesenquimatosa não diferenciada que origina tecido conjuntivo.

**FRIÁVEIS** – Que podem ser reduzidos a fragmentos ou a pó.

**GAP** – espaçamento existente entre duas superfícies; conceito utilizado na teoria de contato para descrever a distância entre o contato e o alvo.

**HISTOLÓGICO** - Que concerne ao estudo da estrutura microscópica, composição e função dos tecidos animais e vegetais; estrutura ou organização de um tecido de organismo ou órgão.

**HOMOGÊNEO** - Qualquer porção do tecido apresenta a mesma característica do todo.

**HETEROGÊNEO** – Porções diferentes de um mesmo tecido apresentando características diferentes.

**INCISAL** - Guarda relação com a idéia de corte profundo.

**ISOTROPIA** - Invariantes em suas propriedades físicas com relação a direção em que sejam aplicadas cargas.

**LINEAR** - Comportamento predizível, vinculando um determinado resultado a um único estímulo segundo um coeficiente de proporcionalidade, como o comportamento de uma reta.

**LINFÁTICOS** - Diz-se dos vasos por onde circula a linfa que representa a defesa contra a invasão microbiana.

**MANDÌBULA** - Maxila inferior, queixada.

**MAXILA** - Cada uma das partes constituídas pelos maxilares (superior e inferior).

**MESENQUIMAL** - Tecido mesodermal conectivo. Forma cartilagens, ossos, vasos.

**MESIAL** - Que diz respeito a linha mediana de um órgão; esquerda.

**MORFOLÓGICO** - Relativo ao estudo das formas e posições dos diversos órgãos do corpo, e das relações que esses guardam entre si.

**NÃO-LINEAR** - Comportamento imprevisível ou que não vincula um determinado resultado a um único estímulo ou, ainda, que não se conformam a linhas retas.

**OCLUSAL** - Diz-se da superfície de encontro dos dentes de arcadas antagônicas.

**OSSO ALVEOLAR** – Placa óssea que reveste o alvéolo dentário; tecido ósseo adjacente ao ligamento periodontal e em contraposição ao cimento dentário.

**OSSO CORTICAL** – Placa óssea que recobre os alvéolos nas suas porções vestibular e lingual.

**OSSO ESPONJOSO** – Porção óssea trabeculada interposta entre o osso alveolar e o osso cortical.

**OSTEOBLASTOS** - Célula embrionária do tecido ósseo.

**OSTEÓCITO** - Célula óssea adulta.

**OSTEOCLASTOS** - Célula que absorve (ou destrói) o tecido ósseo.

**OSTEOSO** – Ossificação.

**PERIAPICAL** - Ao redor do ápice, da ponta.

**PERIÓSTEO** - Membrana fibrosa e vascular que envolve os ossos.

**PROSTÉTICO** – Relativo a órgãos postiços.

**RESILIENTE** - Que oferece resiliência (elasticidade); capacidade de regeneração elástica.

**TISSULAR** - Textural.

**TIXOTROPIA** – Propriedade exibida por certos géis de tornarem-se fluidos quando chacoalhados ou agitados e então tornarem-se semi-sólidos novamente.

**TRABÉCULAS** - Filas de células que atravessam uma cavidade.

**VESTIBULAR** - Cavidade que serve de entrada à outra.



## Referências Bibliográficas

1. ALBUQUERQUE, R. C. *et al.* Stress analysis of an upper central incisor restored with different posts. **Journal of Oral Rehabilitation**, 2003. v. 30, p. 936-943.
2. ALENCAR, F. S. **Simulação paralela de problemas estruturais através do método dos gradientes conjugados**. Brasília, 2003. Projeto de desenvolvimento de metodologias avançadas para modernização de turbinas hidráulicas – Engenharia Mecânica, UNB.
3. AMARANTE, M. V. **Análise de tensões em dentina restaurada com pinos intra radiculares de diferentes materiais**. Rio de Janeiro, 2003. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica do Departamento de Ciências dos Materiais e Metalurgia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
4. ANSYS, **User's Manual**. Release 7.0. 2002.
5. ARANHA, M.L.A.; MARTINS, M.H.P. **Filosofando** : introdução à filosofia. São Paulo : Moderna, 1986.
6. AZEVEDO, A.F.M. **Método dos elementos finitos**. 1. ed. Porto : Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
7. BATHÉ, K. J.; BOUZINOV, P. A. On the constraint function method for contact problems. **Computers & Structures**, 1997. v.64, n. 5/6, p.1069-1085, 1997.
8. BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements an introduction**. New Jersey : Prentice-Hall, 1986.
9. BETIOL, E. A. G. *et al.* Analysis of the posterior fixed partial denture biomechanical behavior. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
10. BOYCE, W.E.; DiPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1998.
11. BOYD, S. *et al.* Computation of local strains in trabecular bone using image guided failure analysis. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON

- COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
12. BOYER, C.B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo : Edgard Blücher, 1996.
  13. BROSH, T., TIBI-MACHOL, I. H., VARDIMON, A. D. Recovery behaviour of the periodontal ligament after a forced tooth deflection : an in vivo study. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  14. CARRANZA, F. A. **Periodontia clínica**. 7. ed. Rio de Janeiro : Guanabara Koogan, 1992.
  15. CHABANAS, M; PAVAN, Y. Finite element model of the face soft tissue for computer assisted maxillofacial surgery. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  16. CHOI, K. *et al.* The effect of a shock-absorbable polymer membrane on the mechanical behavior of dental implants. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF BIOMECHANICS (23. : 1999 : Pittsburgh). **Anais**. Pittsburgh : University of Pittsburgh.
  17. CIMINI *et al.* Revisão crítica das medidas e modelos de cargas atuantes em dentes. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (21. :2000 : Rio de Janeiro). **Anais**. Rio de Janeiro : CILAMCE, 2000.
  18. CLEMENT, R. *et al.* Quasi-automatic 3D finite element model generation for individual single-rooted teeth and periodontal ligament. **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, 2004. v. 73, p. 135-144.
  19. CORNACCHIA, T. *et al.* Comportamento mecânico de restaurações dentárias indiretas. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (25. : 2004 : Recife). **Anais**. Recife : CILAMCE, 2004.
  20. CRAIG, R.G.; POWERS, J.M.; WATAHA, J.C. **Materiais dentários : propriedades e manipulação**. 7. ed. São Paulo : Santos, 2002
  21. CROLET, J. M. Introduction of piezo elasticity phenomenon in cortical bone remodelling. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER

- METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
22. CUMMINS, N. K.; SPEARS, I. R. The effect of mouthguard design on stresses in the tooth-bone complex. **Medicine & Science in Sports & Exercise**, 2002. v.34, n. 6, p. 942-947.
  23. CUNHA, M.C.C. **Métodos numéricos**. 2. ed. Campinas : unicamp, 2000.
  24. DAI, R. A.; POTTS, D. M. Zero thickness interface elements : numerical stability and application. **International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, 1994. v. 18, p. 689-708.
  25. DELLA SERRA, O.; FERREIRA, F. V. **Anatomia dental**. 3. ed. São Paulo : Artes Médicas, 1981.
  26. DOBLARÉ, M.; GARCÍA, J. M.; GRACIA, L. Um modelo de remodelación ósea interna basado em los principios de la Mecânica del Dano. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería**, 2000. v. 16, n.4, p. 513-551.
  27. DOCZI, G. **O poder dos limites** : harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. São Paulo : Mercuryo, 1990.
  28. DOROW, C.; KRSTIN, C; SANDER, F. G. Examination of the viscoelastic material properties of the periodontal ligament in vivo. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  29. ELSGOLTZ, L. **Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional**. Moscou : Mir, 1969.
  30. EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. Campinas : Unicamp, 1997.
  31. FELTRE, R. **Curso básico de química**. v. 1 – 3 São Paulo : Moderna, 1985.
  32. FIGUEIREDO, M. C.; PARRA, S. L. N. Aspectos normais da membrana peridontal e osso alveolar. **Medcenter: Ortodontia e Ortopedia facial**, 2002.
  33. FIGUN, M.E.; GARINO, R.R. **Anatomia odontológica funcional e aplicada**. 3. ed. São Paulo : Panamericana, 1994.
  34. GEI, M.; GENNA, F.; BIGONI, D. An interface model for the periodontal ligament. **Journal of biomechanical engineering**, out. 2002. v. 124, p. 538-546.

35. GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro : LTC, 1988.
36. HAZENBERG, J. G. *et al.* Microcrack growth and shape development in cortical bone. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
37. HOLLISTER, S. J.; MADDOX, R. D.; TABOAS, J. M. Optimal design and fabrication of scaffolds to mimic tissue properties and satisfy biological constraints. **Biomaterials**, 2002. v. 23, p. 4095-4113.
38. JOLIVET, E.; POMERO, V.; SKALLI, W. Finite element model of muscle. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
39. KAWARIZADEH, A. *et al.* Correlation of stress and strain profiles and the distribution of osteoclastic cells induced by orthodontic loading in rat. **European Journal of Oral Science**, 2004. v. 112, p. 140-147.
40. KRSTIN, N. *et al.* Experimental investigation of the viscoelastic material behaviour of the periodontal ligament on specimens in vitro. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
41. LAI, W.M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to continuum mechanics**. 3. ed. Oxford : Pergamon Press, 1993.
42. LAS CASAS, E. *et al.* Computational modeling of dentistry problems. **Computational Methods in Engineering**, 1999. v.257, p. 1-20.
43. LASCALA, N.T.; MOUSSALLI, N. H. **Compêndio terapêutico periodontal**. 2. ed. São Paulo : Artes Médicas, 1995.
44. LEHMANN, R. B.; ELIAS, C. N.; GOUVÊA, J. P. Simulação tridimensional de implantes dentários unitários : Comparação entre implante cônico e cilíndrico. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA (3. : 2004 : Belém). **Anais**. Belém : CONEM, 2004. v. 1.
45. LI, W. *et al.* Fibre reinforced composite dental bridge : Part II: numerical investigation. **Biomaterials**, 2004. v. 25, n. 20, p. 4995-5001.
46. LIMBERT, G. *et al.* Finite element analysis of the mechanical behavior of a new elastomeric material for facial prostheses. In: INTERNATIONAL

- SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
47. LINDHE, J. **Tratado de periodontologia clínica**. 2. ed. Rio de Janeiro : Guanabara Koogan, 1992.
  48. MELLAL, A. *et al.* Effect of interface on the stress distribution around dental implants : A 3-D finite element analysis. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  49. MENDES, S. *et al.* Biocompatibility testing of novel starch-based materials with potential application in orthopaedic surgery : a preliminary study. **Biomaterials**, 2001. v. 22, p. 2057-2064.
  50. MENSOR, M. C.; *et al.* Compliant keeper system replication of the periodontal ligament protective damping function for implants : Part I. **The Journal of Prosthetic Dentistry**, 1998. v. 80, n. 5, p. 565-569.
  51. NG-THOW-HING, V.; AGUR, A.; MCKEE, N. A muscle model that captures external shape, internal fibre architecture, and permits simulation of active contraction with volume preservation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  52. OOMENS, C. W. J. *et al.* A three dimensional finite element model for contracting skeletal muscle. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  53. OOSTERWYCK, H. *et al.* Simulation of marginal bone resorption around a cylindrical oral implant. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais**. Rome, 2001.
  54. PINI, M. *et al.* Mechanical characterization of bovine periodontal ligament. **Journal of Periodontal Research**, 2002. v. 37, p. 237-244.
  55. PROVATIDIS, C. G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament. **Medical Engineering & Physics**, 2000. v. 22, p. 359-370.
  56. \_\_\_\_\_. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation. **International Journal of Engineering Science**, 2001. v. 39, p. 1361-1381.

57. \_\_\_\_\_. Hydrodynamic versus elastic analysis of tooth movement. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001a : Rome). **Anais.** Rome, 2001a.
58. REES, J. S.; JACOBSEN, P. H. Elastic modulus of the periodontal ligament. **Biomaterials**, 1997. v. 18, n. 14, p. 995-999.
59. RIBEIRO, J. P. F. **Análise, através do método de elementos finitos, das distribuições de tensões em dente com e sem remanescente coronário, utilizando diferentes pinos intra-radiculares.** Ponta Grossa, 2004. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ciências da Saúde, Universidade Estadual de Ponta Grossa.
60. ROA, O. *et al.* On the use of generated geometries for the numerical analysis of trabecular bone specimens. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER METHODS IN BIOMECHANICS & BIOMEDICAL ENGINEERING (5. : 2001 : Rome). **Anais.** Rome, 2001.
61. SABONNADIÈRE, J.C.; COULOMB, J.L. **Elementos finitos e CAE : aplicações em engenharia elétrica.** São Paulo : Aleph, 1993.
62. SANT'ANA, A. C. P. *et al.* Cultura e caracterização de células derivadas de ligamento periodontal humano. **Rev Fac Odontol Bauru**, 2002. v.10, n.2, p. 134-140.
63. SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. **Computers & Structures**, 1992. v. 42, n. 1, p. 97-116.
64. SKINNER, E.W. **Materiais dentários de Skinner.** 8. ed. Rio de Janeiro : Interamericana, 1984.
65. SONCINI, M. *et al.* Experimental procedure for the evaluation of the mechanical properties of the bone surrounding dental implants. **Biomaterials**, 2002. v. 23, p. 9-17.
66. STASZYK, C.; GASSE, H. Oxytalan fibres in the periodontal ligament of equine molar cheek teeth. **Anat. Histol. Embryol.**, 2004. v. 33, p. 17-22.
67. TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos.** 1. ed. Rio de Janeiro : LTC, 1983.
68. TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity.** 3. ed. New York : McGraw-Hill, 1970.

69. VOSGERAU, A. R. **Análise do comportamento biomecânico de uma prótese parcial fixa posterior.** Curitiba, 2002. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná.
70. WHEELER, R.C. **Dental anatomy, physiology and occlusion.** 5. ed. Philadelphia : W.B.Saunders Company, 1974.
71. WILLIAMS, K. R.; WILLIAMS, A. D. C. Impulse response of a dental implant in bone by numerical analysis. **Biomaterials**, 1997. v. 18, p. 715-719
72. YOSHIDA, N. *et al.* In vivo measurement of the elastic modulus of the human periodontal ligament. **Medical Engineering & Physics**, 2001. v. 23, p. 567-572.
73. ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method.** 4. ed. New York : McGraw-Hill, 1988.
74. ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais,** v. 1-2. São Paulo : Makron Books, 2001.